

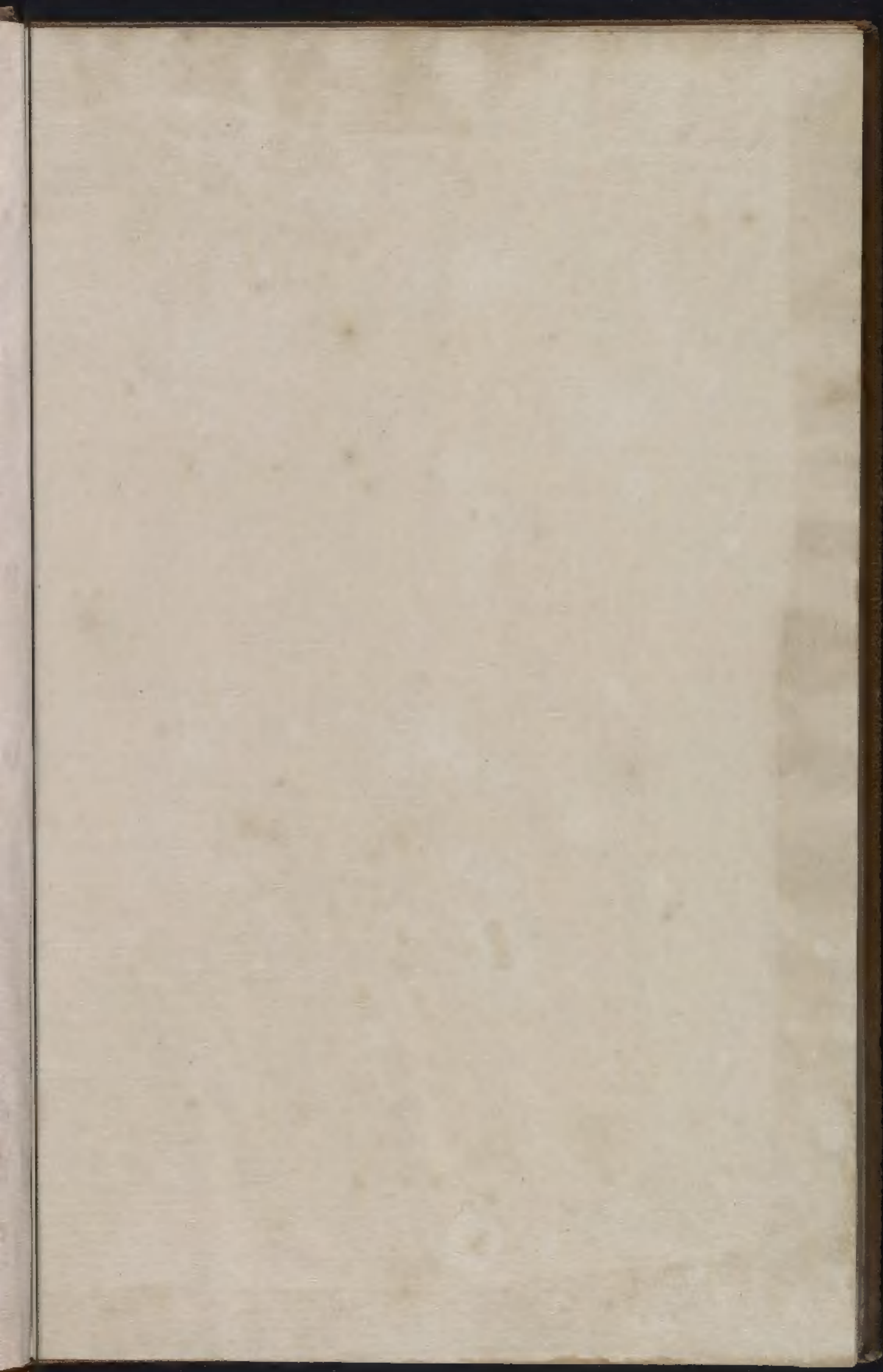


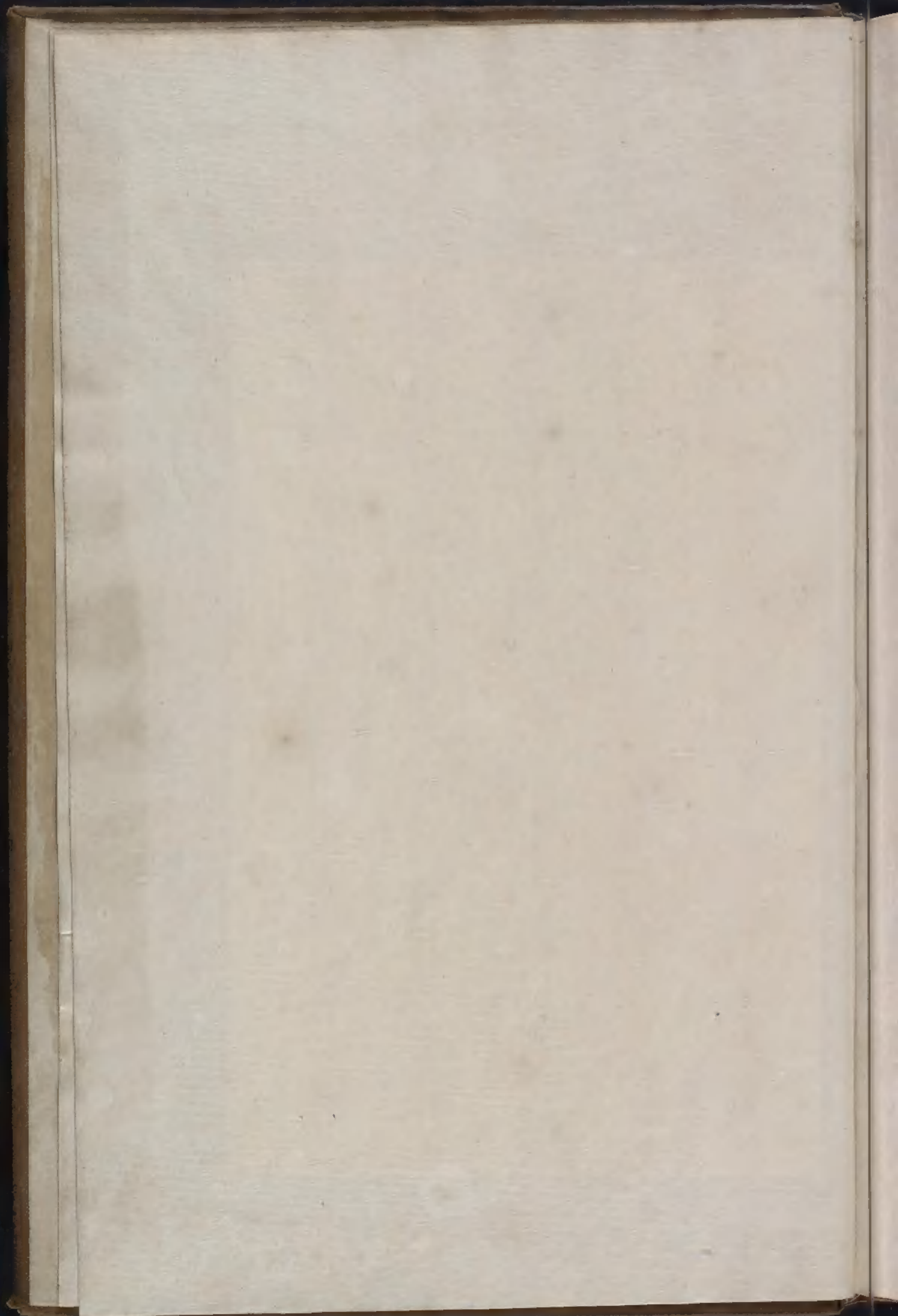
LJS BIBLIOTHECA
SCHOENBERG
199
SCHOENBERG DATABASE
OF MANUSCRIPTS LJS

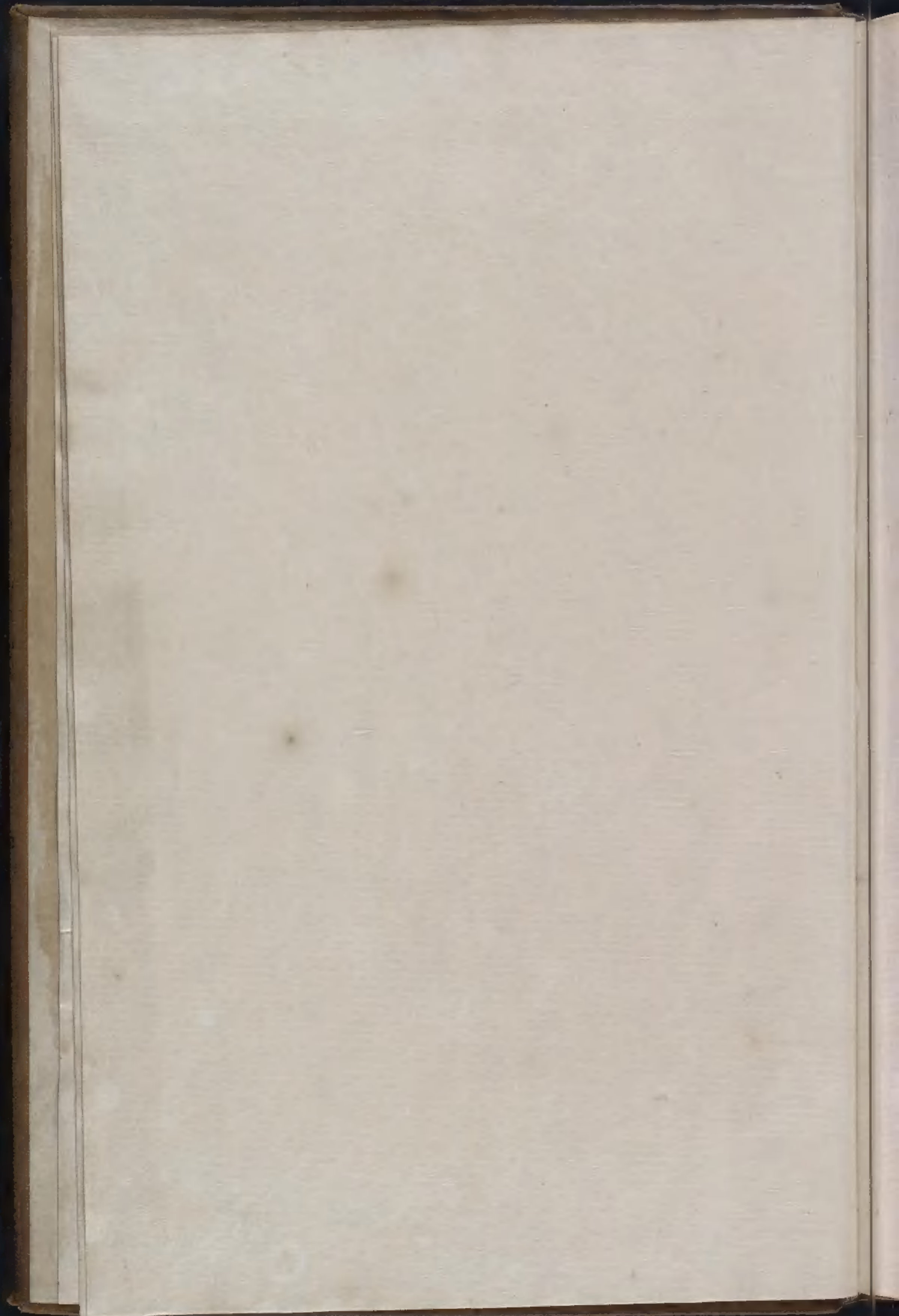
*Artis Analyticae Specimina
sive
Geometria Analytica.*

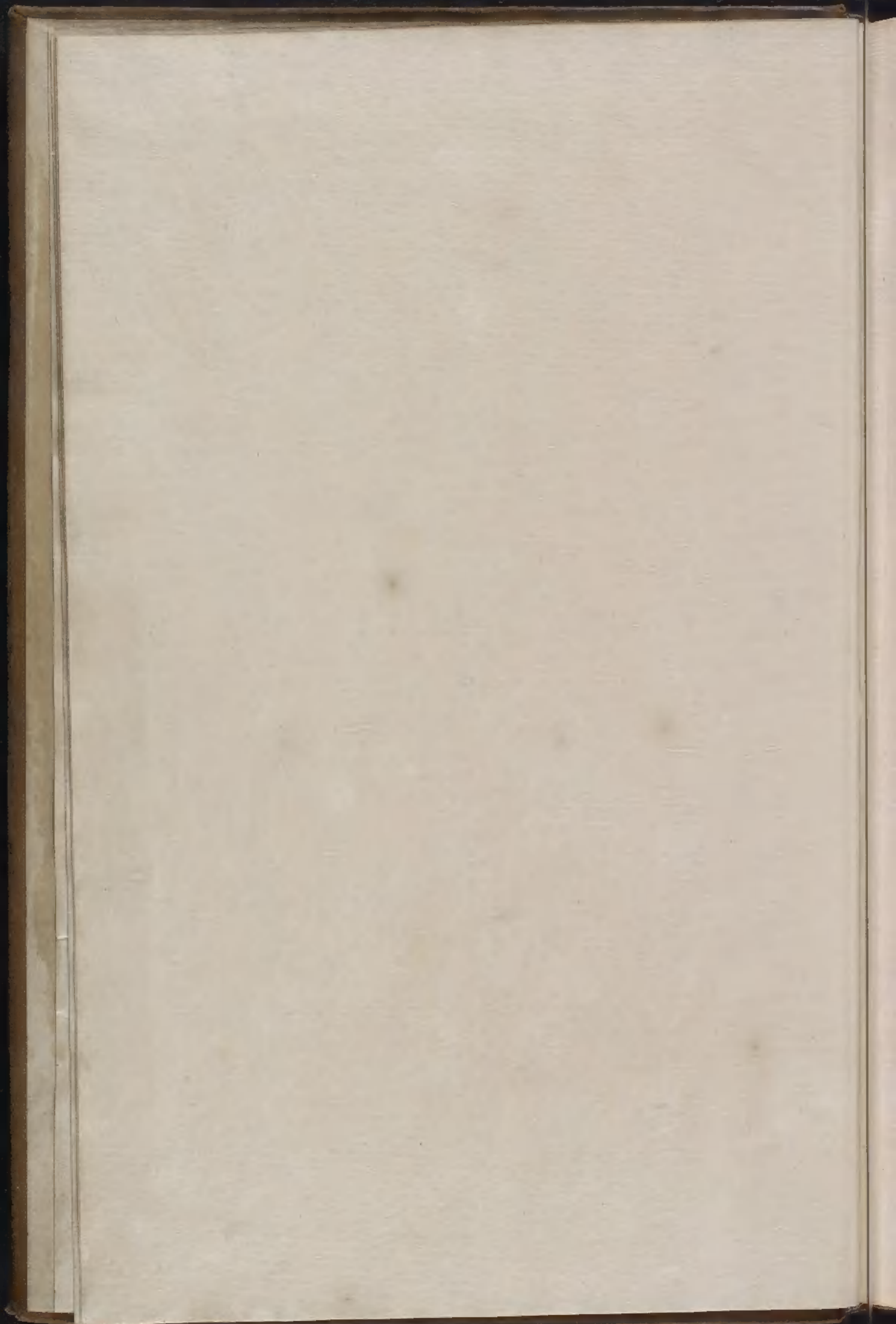
*Auctore
Isaaco Newtono,
Equite Aurato.*











Animadvertenti plerumque Geometras, posthabita fere veterum Synthetica methodo, Analytica excolenda plurimum incumbere, et ejus ope tot tantasque difficultates superasse ut penitus omnia, extra Curvarum Quadraturas et similia, quadam nondum penitus enodata, videantur exhaustisse: placuit sequentia, quibus Campi Analytici terminos exprimeret, juxta et Curvarum Doctrinam promovere possem in gratiam discentium breviter compingere.

Cum in Numeris et Speciebus Operationes computandi personiles sint neque differre videantur nisi in Characteribus quibus quantitates in istis definite in his indefinite designantur: demiror quod Doctrinam de Numeris Decimalibus nuper inventam (si Quadraturam Hyperbolæ per N. Mercatorem demas) nemini in mentem venerit Speciebus itidem accommodare, præsertim cum ad præclariora viam aperit. Hæc autem de Speciebus Doctrina, cum eodem modo ad Algebram relata sit ac Doctrina Decimalium Numerorum ad vulgarem Arithmeticam; Operationes Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio et Extractio Radicum exinde addisci possunt; modo Lector utriusque et Arithmetice et Algebrae vulgaris peritus fuerit, et noverit correspondentiam inter Decimales Numeros ac Terminos Algebraicos in infinitum continuatos; scilicet quod singulis Numerorum locis proportionem Decimalem dextrorsum perspectio decrecentibus correspondent singuli Specierum termini secundum Seriem dimensionem Numeratorum vel Denominatorum uniformi progressionem in infinitum continuatam (prout factum in sequentibus) ordinatis. Et quemadmodum commoditas Decimalium in eo consistit ut Fractiones ~~et~~ Radicales in eos reducta quodammodo Naturam Integrorum induant. Sic etiam infinitarum Specierum commoditas est quod per eas
abstr.

abstrusiorum Terminorum genera (quales sunt Fractiones a compositis Quantitatibus Denominatae, compositarum Radices, et Radices affectarum. Equationum) possunt ad simplicium genus reduci, ad infinitas nempe Fractionum Series Numeratores ac Denominatores Simples habentium, in quibus nulla sunt aliorum difficultates propemodum insuperabiles. Imprimis itaq; reductiones aliarum quantitarum ad huiusmodi Terminos & Methodos computandi minus obvias ostendam, dein hanc Analysis ad solutiones Problematum applicabo.

Reductiones per Divisionem et Extractionem Radicum e sequentibus Exemplis cum similibus operandi modis in Arithmetica Decimali et Specioso collatis elucescet.

Exempla Reductionum per Divisionem.

Proposita $\frac{aa}{b+x}$ divide aa per $b+x$ ad hunc modum.

$$\begin{array}{r}
 b+x \overline{) aa + 0} \left(\frac{aa}{b} - \frac{aax}{b^2} + \frac{aax^2}{b^3} - \frac{aax^3}{b^4} + \frac{aax^4}{b^5} \right. \\
 \underline{aa + \frac{aax}{b}} \\
 0 - \frac{aax}{b} + 0 \\
 \underline{- \frac{aax}{b} - \frac{aax^2}{b^2}} \\
 0 + \frac{a^2x^2}{b^2} + 0 \\
 \underline{+ \frac{a^2x^2}{b^2} + \frac{a^2x^3}{b^3}} \\
 0 - \frac{a^2x^3}{b^3} + 0 \\
 \underline{- \frac{a^2x^3}{b^3} - \frac{a^2x^4}{b^4}} \\
 0 + \frac{a^2x^4}{b^4} \text{ &c.}
 \end{array}$$

Et prodit $\frac{aa}{b} - \frac{aax}{b^2} + \frac{aax^2}{b^3} - \frac{aax^3}{b^4}$ &c. quae Series in infinitum continuata tantum valet ac $\frac{aa}{b+x}$. Vel posito x primo Divisoris termino, hoc modo $x+b$ aa (prodit $\frac{aa}{x} - \frac{aab}{x^2} + \frac{aab^2}{x^3} - \frac{aab^3}{x^4}$ &c.

Ado

Ad eundem modum Fractio $\frac{1}{1+xx}$ reducitur ad $1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8$ &c. vel ad $x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8}$ &c.

Et Fractio $\frac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2-3x}$ ad $2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13x^2 + 34x^{\frac{5}{2}}$ &c.

Ubi obiter notandum est quod usurpo $x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-4}$ &c. pro $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}$; et $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{3}{2}}, x^{\frac{5}{2}}, x^{\frac{7}{2}}, x^{\frac{9}{2}}$ &c. pro $\sqrt{x}, \sqrt{x^3}, \sqrt{x^5}, \sqrt{x^7}, \sqrt{x^9}$; et $x^{-\frac{1}{2}}, x^{-\frac{3}{2}}, x^{-\frac{5}{2}}$ &c. pro $\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \frac{1}{\sqrt{x^5}}$, &c. ob Analogiam rei quae deprehendi potest ex huiusmodi Geometricis Progressionibus $x^3, x^{\frac{5}{2}}, x^4, x^{\frac{7}{2}}, x^5, x^{\frac{9}{2}}, x^6$ (sive $x^{-\frac{1}{2}}, x^{-1}, x^{-\frac{3}{2}}, x^{-2}$ &c.

Ad hunc modum pro $\frac{aa}{x} - \frac{aab}{x^2} + \frac{aab^2}{x^3}$ &c. scribi potest $aa x^{-1} - aab x^{-2} + aab^2 x^{-3}$ &c.

Et sic vice $\sqrt{aa-xx}$ scribi potest $aa-xx)^{\frac{1}{2}}$; Et $aa-xx)^2$ vice Quadrati ex $aa-xx$; Et $\frac{abb-yy^3}{by+yy}$ vice $\sqrt[3]{\frac{ab^2-yy^3}{by+yy}}$. Et sic in alijs.

Unde merito potestates distinguuntur in Affirmativas et Negativas, Integrae et Fractae.

Exempla Reductionum per Extractionem Radicum.

Proposito $aa+xx$, Radicem ejus ut sequitur extrahes.

$$\begin{array}{r} \frac{aa}{a} + \frac{xx}{x} \left(a + \frac{x^2}{4a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \frac{7x^{10}}{256a^9} - \frac{21x^{12}}{1024a^{11}} \right) \text{ &c.} \\ \hline \frac{aa}{a} + \frac{xx}{x} + \frac{x^3}{4a^2} \\ \hline - \frac{x^3}{4a^2} \\ \hline - \frac{x^5}{4a^2} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6} \\ \hline + \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6} \\ \hline \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{16a^6} - \frac{x^{10}}{64a^8} + \frac{x^{12}}{256a^{10}} \\ \hline - \frac{5x^8}{64a^6} + \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}} \text{ &c.} \\ \hline - \frac{5x^8}{64a^6} - \frac{5x^{10}}{128a^8} + \frac{5x^{12}}{512a^{10}} \\ \hline - \frac{7x^{10}}{128a^8} - \frac{7x^{12}}{512a^{10}} \\ \hline \frac{7x^{10}}{128a^8} + \frac{7x^{12}}{256a^{10}} \\ \hline - \frac{21x^{12}}{512a^{10}} \end{array}$$

Et prodit $a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3}$ &c. Ubi notandum quod circa finem operis eos omnes terminos negligo quorum Dimensiones transcenderent Dimensiones ultimi Termini ad quem capio Quotientem solum modo produci puta $\frac{x^{12}}{a^4}$.

Potest etiam Ordo Terminorum inverti ad hunc modum $xx + aa$ et Radix erit $x + \frac{aa}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} + \frac{a^6}{16x^5}$ &c.

Sic ex $aa - xx$, Radix est $a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5}$ &c.

Et ex $x - xx$ est $x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$ &c.

Et ex $aa + bx - xx$ est $a + \frac{bx}{2a} - \frac{xx}{2a} - \frac{b^2x^2}{8a^3}$ &c.

Et ex $\frac{1+axx}{1-bxx}$ est $\frac{1+\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{8}a^2x^4+\frac{1}{16}a^3x^6}{1-\frac{1}{2}bx^2-\frac{1}{8}b^2x^4-\frac{1}{16}a^3x^6}$ &c. factaq; insuper

Divisione fit $1 + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{3}{8}bbx^4 + \frac{5}{16}b^3x^6$ &c.
 $\quad \quad \quad + \frac{1}{2}a \quad \quad + \frac{1}{4}ab \quad \quad + \frac{1}{16}ab^2$
 $\quad \quad \quad - \frac{1}{8}aa \quad \quad - \frac{1}{16}a^2b$
 $\quad \quad \quad + \frac{1}{16}a^3$

Operationes vero per debitam preparationem non raro abbreviari possunt; Ut in allato Exemplo ad extrahendum $\sqrt{\frac{1+axx}{1-bxx}}$, si non eadem fuisset Numeratoris ac Denominatoris forma, utrumq; Multiplicatum per $\sqrt{1-bxx}$ & sic prodisset $\frac{\sqrt{1+axx} \cdot \sqrt{1-bxx}}{1-bxx}$ et reliquum opus perficeretur extrahendo Radicem Numeratoris tantum ac dividendo per Denominatorem.

Ex hisce credo manifestum est quo pacto Radices alio possunt extrahi et quaelibet compositae Quantitates (quibuscumq; Radicibus vel Denominatoribus perplexae ut hic videre est $x^3 + \frac{\sqrt{x-\sqrt{1-xx}}}{\sqrt{axx+x^3}} - \frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2-x^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt[3]{x+xx-\sqrt{2x-x^{\frac{1}{2}}}}}$.) in Series infinitas Simplicium Terminorum reduci.

De Affectarum Equationum Reductione.

Propositis vero affectis Aequationibus, modus quo Radices earum ad huiusmodi Series possint obnoxius explicari debet, idq. cum earum Doctrina quam hactenus in Numeris exposuerunt Mathematici, per ambages (superfluis etiam Operationibus adhibitis) tradatur ut in Specimen Operis in Speciebus non debeat adhiberi. Imprimis itaq. Numerosam affectarum Aequationum Resolutionem compendiosè tradam dein Speciosam similiter explicabo.

Proponatur Aequatio $y^3 - 2y - 5 = 0$ resolvenda; et sit 2 Numerus ut cumq. inventus qui minus quàm decimâ sui parte differt a Radice quaesita. Tum pono $2 + p = y$ et pro y substituo $2 + p$ in Aequationem, et inde naç prodit $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$ cujus Radix p exquirenda est ut Quotienti addatur. Nempe (neglecti $p^3 + 6p^2$ ob parvitatem) $10p - 1 = 0$ sive $p = 0,1$ ad veritatem proximè accedet. Scribo itaq. 0,1 in Quotiente, & suppono 0,1. $q = p$ et hunc ejus fictitium valorem ut ante substituo et prodit $q^3 + 6,39q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$. Et cum $11,23q + 0,061 = 0$ veritatem appropinq. sive. fere sit $q = -0,0054$ (dividendo nempe 0,061 per 11,23 donec tot eliciantur figurae quot loca primis figuris hujus et principalis quotientis exclusivè intercedunt, quemadmodum hic duo sunt inter 2,40,005) scribo -0,0054 in inferiori parte quotientis siquidem negativa sit, et supponam $-0,0054 + r = q$, hunc ut prius substituo. Et sic operationem ad placitum produco, pro more subjecti Diagrammatis.

		+ 2,10000000	
		- 0,00544000	
		0,09455140	
$2 + p = y$	y^3	+ 8 + 12p + 6p^2 + p^3	
	$- 2y$	- 4 - 2p	
	$- 5$	- 5	
	Summa	- 1 + 10p + 6p^2 + p^3	
$0,1 + q = p$	p^3	+ 0,001 + 0,039 + 0,39^2 + q^3	
	$+ 6p^2$	+ 0,06 + 1,2 + 6	
	$+ 10p$	+ 1, + 10,	
	$- 1$	- 1	
	Summa	0,061 + 11,239 + 6,39^2 + q^3	
$- 0,0054 + r = q$	q^3	- 0,000000157464 + 0,000007407 - 0,000000000000 + 0,000000000000	
	$+ 6,39q^2$	+ 0,000183720 - 0,000000000000 + 0,000000000000	
	$+ 11,23q$	- 0,060642 + 11,23	
	$+ 0,061$	+ 0,061	
	Summa	+ 0,0005416 + 11,1627	
$- 0,00004052 + r$	$+ r$		
	$= r$		

Opus vero sub fine (praesertim in Aequationibus plurium Numeris) hac Methodo multum abbreviabitur. Determinato quousq. velis Radicem extrahi tot loca post primam Figuram coefficientis penultimi termini Aequationum in dextra parte Diagrammatis resul.

resultantium adnumera, quot supersunt Loca in Quotiente complenda, & subsequentes Decimales negliges. In ultimo vero termino Decimales post tot plura loca negliges quot in Quotiente complentur loca Decimalia. Inq antepenultimo termino negliges omnes post tot pauciora loca. Et sic deinceps Arithmetice progrediendo per intervallum istud locorum, sive quod perinde est: tot figuras passion elidendo quot in penultimo termino, modo depreffissima earum loca sint in Arithmetica progressionem iuxta Seriem terminorum, aut Circulis compleri subintelligentur ubi res aliter eveniat. Sic in exemplo jam posito, si cupiam ut Quotiens ad octavum tantum Decimalem locum compleatur; inter substituendum $00054 + r$ pro q , ubi quatuor loca Decimalia in quotiente compleatur, ac totidem supersunt complenda, potui Figuras in inferioribus quinq locis omisisse quas propter lineolam transversam notavi; imo primum terminum r^3 etiam coefficientem 99999 habuisset, potui tamen penitus omisisse. Expunctis itaq figuris istis pro subsequente operatione prodit summa $0,000547 + 11,1625$ quae per Divisionem ad usq praescriptam terminum peractum dat $-0,00004832$ pro r , quod quotientem ad optatam periodum complet.

Deniq negativam partem quotientis ab Affirmativa subduco, et oritur $2,09455148$ Quotiens absoluta.

Præterea notandum est quod subinitio operis si dubitarem an $q = p$ ad veritatem satis accederet, vice $10p - 1 = 0$ facissem $6p^2 + 10p - 1 = 0$ et ejus Radicis nihil proprioris primam figuram in Quotiente scripsissem. Et hoc modo secundam vel etiam tertiam Quotientis Figuram explorare convenit ubi in Aequatione secundaria circa quam versaris, Quadratum coefficientes penultimi termini non sit decies major quam factus ex ultimo termino ducto in coefficientem termini antepenultimi. Quinimo laborem plerumq minues, praesertim in Aequationibus plurimarum Dimensionum, si figuras omnes quotienti addendas hoc modo (id est, extrahendo minorem Radicum ex tribus ultimis terminis Aequationis ejus Secundariae) quaras. Sic enim Figuras duplo plures in quotiente quolibet vice lucraberis.

His in Numeris sic ostensis, consimiles operationes in Speciebus explicanda restant, de quibus convenit sequentia praenoscere.

1. Quod e Speciebus coefficientibus aliqua pra reliquis (si sint plures) insigni-
enda sit, ea nempe quae est, aut fingi potest esse omnium longè minima vel maxima
vel data quantitate vicinissima: Cujus rei causa est, ut ob ejus Dimensiones in
Numeratibus vel Denominatoribus terminorum quotientis perpetim auctas, illi
termini continuo minores et inde quotientis Radici propinquior evadat, sicut ante de
Specie x in Exemplis Reductionum per Divisionem & Extractionem Radicum mani-
festum esse potest. Pro isthac vero Specie in sequentibus ut plurimum usurpabo etiam
x vel z, quomodo et y, p, q, r, s &c. pro Specie Radicali extrahenda.

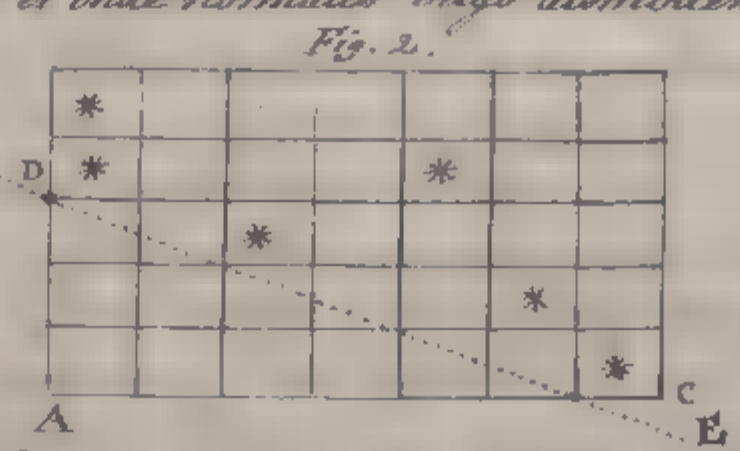
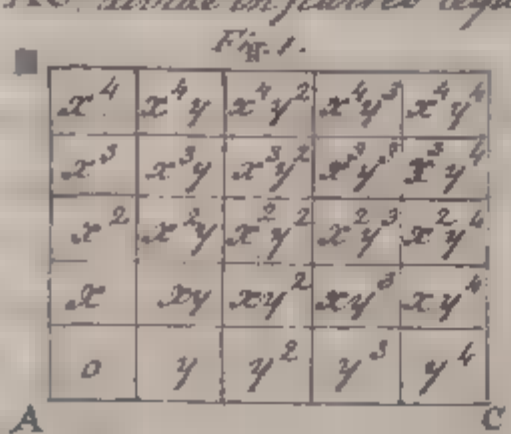
2. Quando fractiones complexae vel Saepe Quantitates in Aequatione proposita
vel post in operatione occurrant, tolli debent per Methodos Analysis satis notas.
Quomodo si habeatur $y + \frac{6x}{b-x} y^2 - x^3 = 0$ multiplico per $b-x$, et ex facto by^3
 $-xy^3 + b^2y^2 - bx^3 + x^4 = 0$ valorem y dico. Vel possum fingere $y \times b - x = v$, et sic scribendo
 $\frac{v}{b-x}$ pro y, orietur $v^3 + b^2y^2 - b^2x^3 + 2bx^4 - x^5 = 0$ dein extracta radice v, divido quotien-
tem per $b-x$ ut obtineatur valor y. Item si preparatur $y^3 - xy^3 + x^3 = 0$, fingo $y^3 = v$,
et $x^3 = z$, et sic scribendo vv pro y, et z pro x, orietur $v^3 - zv + z^3 = 0$; qua Aequatione
resoluta resituo y et x. scilicet radice invenietur $v = z + z^3 + 6z^5$ &c. &c. resituito y
&c. orietur $y^3 = x^3 + x + 6x^3$ &c. et quadrando $y = x^3 + 2x^3 + 13x^5$ &c.

Ad eundem modum si quis sint negativa dimensiones ipsorum x & y, tollo multipli-
cando per eandem x & y. sic habito $x^3 + 3x^2y - 2xy^2 - 16y^3 = 0$ multiplico per x et y,
orietur $x^4y^3 + 3x^3y^2 - 2xy^3 - 16 = 0$. Et habito $x = \frac{y}{y^2} - \frac{2y^3}{y^2} + \frac{16y^4}{y^3}$ duco in y³ et orietur
 $xy^3 = y^2 - 2y + 16$. Et sic de ceteris.

3. Aequatione sic preparata, opus ab inventione primi termini quotientis incipit
venit, de qua ut et ceteris subsequentium terminorum inventionem hac esto regula
generalis cum Specie indefinita (x vel z) parva esse fingitur, ad quem casum
ceteri duo casus sunt reducibiles.

Et terminis in quibus Specie Radicalis (y, p, q vel r &c.) non reponitur selige
depressissimum respectu dimensionum indefinita Speciei (x vel z &c.) dein alium
terminum in quo sit illa Specie Radicalis selige, talem nempe ut progressio dimen-
sionum utriusque praefata Speciei a termino prius assumpto ad hunc terminum continuata
quam maxime potest descendat, vel minime ascendat. Et si qui sint alij termini quorum
dimensiones cum hac progressionem ad arbitrium continuata conveniant, eos etiam
selige. Denique ex his selectis terminis tanquam nihil, aequalibus quare valorem
dictae speciei radicalis et Quotienti appone.

Ceterum ut hac regula magis clarescat, placuit insuper operi sequen-
tis Diagrammatis exponere. Descripto angulo recto BAC, latera ejus
BA, AC, divide in partes aequales, et inde normalis origo distribuentes



angulare spatium in aequalia quadrata vel parallelogramma, quae concipio
denomi-

denominata esse a Dimensionibus Specierum x & y , prout vides in fig. 1. inscriptas. Deinde cum aequatio aliqua proponitur parallelogramma singulis ejus terminis correspondentia insignis nota aliqua. Et regulam ad duo vel forte plura, ex insignitis parallelogrammorum applicatam quocum unum sit humillimum in Columna Sinistra juxta AB, et alia ad regulam dextrorsum sita, ceteraq; omnia non contingentia regulam supra eam jaceant: Seligo terminos Aequationis per parallelogramma contingentia regulam designatos, et inde quero quantitatem quotienti addendam.

Sic ad extrahendam radicem y ex $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^2}{2}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$, parallelogramma hujus terminis respondentia signo nota aliqua * ut vides in Schem. 2. Dein applico regulam DE ad inferiorem e locis signatis in sinistra Columna, eamq; ab inferioribus ad superiora dextrorsum gyrare facio donec alium similiter vel forte plura e reliquis signatis locis caperet attingere, videlicet loca sic attacta ofa $x^2, x^2y^2, 4y^6$. Et terminis itaq; $y^6 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3$ tanquam nihilo aequalibus (et insuper si placet reductis ad $v^6 - 7v^2 + 6 = 0$, ponendo $y = v\sqrt{ax}$) quero valorem y , et invenio quadruplicem $+ \sqrt{ax}, - \sqrt{ax}, + \sqrt{2ax}, - \sqrt{2ax}$, quorum quolibet pro initio quotientis accipere liceat prout e radicibus quampiam extrahere deestum.

Sic ex $y^6 - by^2 + 9bx^2 - x^3 = 0$, seligo $-by^2 + 9bx^2$, et inde obtineo $+ 3x$ pro initiali termino quotientis.

Item $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$ Seligo $y^3 + \frac{2}{3}y - 2a^3$ et radicem ejus $+ a$ scribo in quotiente.

Et ex $x^2y^5 - 3c^4xy^2 - c^5x^2 + c^7 = 0$. Seligo $x^2y^5 + c^7$, quod exhibet $\sqrt[5]{\frac{c^7}{x^2}}$ pro initio quotientis. Et sic de ceteris.

Ceterum invento hoc termino, si is contingat ofa negativa potestatis, Aequationem per eandem indefinitam Speciei potestatem deprimam eo ut non opus sit inter solvendum deprimere, et insuper ut regula de superfluis terminis elidendis max. habenda apte possit adhiberi. Sic proposito $8x^6y^3 + ax^6y^2 - 27a^2 = 0$ cujus quotientis exordium debet a $\frac{3a^2}{27x^2}$, deprimam per $27x$, ut fiat $8x^4y^3 + ax^4y^2 - 27a^2x^{-2} = 0$, antequam Solutionem in eo.

Subsequentem quotientum termini eadem methodo ex Aequationibus Secundariis inter operandum proceduntibus occurrunt, sed ut plurimum leviori cura. Nos enim peragi solet dividendo depressissimum e terminis indefinitae potestatis Speciei ($x, xx, x^3, &c.$) absq; Specie radicali ($p, q, r, &c.$) affectis, per quantitatem quamcum Species illa radicalis unius tantum dimensionis absq; altera indefinitae Specie afficitur, et exitum scribendo in quotiente. Sic in exemplo sequente termini $\frac{x}{4}, \frac{xx}{64a}, \frac{131x^3}{512a^2}, &c.$ eliciuntur dividendo a^2x , $\frac{1}{16}axx$, $\frac{131}{512}x^3$, $\frac{1}{4}x$ per $4aa$.

His praemissis restat ut praecur resolutionis exhibeam. Sit itaq; $y^3 + ay + aay - 2a^3 - x^3 = 0$. Aequatio resolvenda; et ex ejus terminis $y^3 + aay - 2a^3 = 0$, Aequatione fictitia juxta tertium e praemissis elicio $y - a = 0$ & scribo $+ a$ in quotiente. Deinde cum $+ a$ accurate valet y , pono $a + p = y$ et pro y in terminis Aequationis Margine scriptis substituo $a + p$, terminosq; resultantor ($p + 3ap^2 + aap$ &c.) unum scribo in Margine, ex quibus iterum juxta tertium e praemissis excepto terminos $+ 4ap + a^2x = 0$ pro Aequatione fictitia, quae cum exhibet $p = -\frac{1}{4}x$, scribo $-\frac{1}{4}x$ in quotiente. Praeterea cum $-\frac{1}{4}x$ accurate valet p , pono $-\frac{1}{4}x + q = p$, & pro p in terminis marginalibus substituo $-\frac{1}{4}x + q$, terminosq; resultantor ($q^3 - \frac{3}{4}xq^2 + 3aq^2$ &c.) iterum scribo in Margine, ex quibus denum juxta regulam praefatam seligo terminos $11a^2q - \frac{1}{16}aa^2 = 0$ pro Aequatione fictitia quae cum exhibeat $q = \frac{xx}{64a^2}$, scribo $+\frac{xx}{64a^2}$ in Quotiente.

Pono

Possio cum $\frac{xx}{64a}$ non accurate valeat q , pono $\frac{xx}{64a} + r = q$, & pro q in terminis Marginalibus substituo $\frac{xx}{64a} + r$, & sic opus ad placitum produco prout indicat subjectum Diagramma.

$(a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3})$		
$+a+p=y$	$+y^3$ $+axy$ $+a^2y$ $-x^3$ $-2a^3$	$+a^3+3a^2p+3ap^2+p^3$ $+a^2x+axp$ $+a^3+a^2p$ $-x^3$ $-2a^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	$+p^3$ $+3ap^2$ $+aap$ $+4a^2p$ $+a^2x$ $-x^3$	$-\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{16}x^2q - \frac{3}{4}xq^2 + q^3$ $+\frac{3}{16}ax^2 - \frac{3}{2}axq + 3aq^2$ $-\frac{1}{4}ax^2 + axq$ $-a^2x + 4a^2q$ $+a^2x$ $-x^3$
$+\frac{xx}{64a} + r = q$	$+q^3$ $-\frac{1}{4}xq^2$ $+3aq^2$ $+\frac{3}{2}xq$ $-1axq$ $+4a^2q$ $-\frac{6x}{64}x^3$ $-\frac{1}{16}ax^2$	$*$ $*$ $+\frac{3x^4}{4096a} + \frac{3}{32}x^2r + 3ar^2$ $+\frac{3x^4}{1024a} + \frac{3}{16}x^2r$ $-\frac{1}{128}x^3 - \frac{1}{2}axr$ $+\frac{1}{16}ax^2 + 4a^2r$ $-\frac{6x}{64}x^3$ $-\frac{1}{16}ax^2$
$+4a^2 - \frac{1}{2}ax) + \frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a} (+ \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3})$		

Quod si Quotientem ad certam usq. periodum produci cupiam ut x nempe in ultimo ejus termino ultra datum dimensionum numerum non ascendat terminos inter substituendum semper omitto quos nulli deinceps usui fore provideam. Cujus rei regula esto, quod post primum terminum ex qualibet quantitate in Margine col. laterali resultantem non addantur plures deatrorum, quam istius primi resultantis termini dimensio a periodica sive maxima dimensione quotientis deficit gradibus. Ut in hoc Exemplo si cupiam ut Quotiens (sive x in Quotiente) ad quatuor tantum Dimensiones ascendat, omitto omnes terminos post x^4 , & post x^3 pono unicum tantum. Terminos itaq. post notum * delendos esse concipe: Et opere sic continuato donec ultimè ad terminos $(\frac{15x^4}{4096a} - \frac{131}{128}x^3 + 4a^2r - \frac{1}{2}axr)$ deveniatur in quibus (p, q, r , vel S &c) residuum Radicis extrahenda sit unica tantum Dimensionis; tot terminos $(+ \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3})$ per divisionem elicias, quot ad complendum quotientem deesse videbis. Atq. ita tandem obtinebitur $y = a - \frac{1}{4}x + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$.

Plenioris

Plenioris illustrationis gratia dedi aliud Exemplum resolvendo $\frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + y - z = 0$; Ubi proponitur inventio quotientis ad quintam tantum Dimensionem, terminiq; superflui post notam (K) negliguntur.

Atq; ita si cupiam Aequationem $\frac{63y''}{2816} + \frac{35}{1152}y^7 + \frac{5}{112}y^7 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{1}{6}y^3 + y - z = 0$, ad usq; nonam tantum Dimensionem quotientis resolvere, ante opus initum negligo terminum $\frac{63}{2816}y''$, deinde inter operandum negligo etiam omnes terminos post z^2 , post z^7 pono unicum, ac duos tantum post z^5 , eo quod percipio quotientem ubiq; per gradus binarum unitatum (hoc modo z, z^3, z^5, K) debere ascendere. Tandemq; prodit $y = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{562000}z^9$.

Et hinc patet artificium quo Aequationes in infinitum affectae, vel utcumq; multis numeroq; infinitis terminis constanter possunt solvi. Scilicet omnes termini ante opus initum debent negligi in quibus dimensio Speciei indefinitae parva non affecta cum radicali Specie transcendit maximam dimensionem in quotiente desiderantem, vel ex quibus, substituendo pro radicali Specie primum terminum quotientis ope respelatae tabula inventum, non nisi ejusmodi transcendentes termini possunt emergere. Sic in Exemplis novissimis terminos omnes supra y quamvis infinite progredierentur omisissam. Et sic in hac Aequatione

$$0 = \begin{cases} -8 + z^2 - 4z^4 + 9z^6 - 16z^8 & K \\ +y \text{ in } z^2 - 2z^4 + 3z^6 - 4z^8 & K \\ -y^2 \text{ in } z^2 - z^4 + z^6 - z^8 & K \\ +y^3 \text{ in } z^2 - \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{3}z^6 - \frac{1}{4}z^8 & K \end{cases}$$

ut radix Cubica ad quatuor tantum dimensiones ipsius z extrahatur mitto omnes in infinitum terminos post $+y^3$ in $z^2 - \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{3}z^6$, post $-y^2$ in $z^2 - z^4 + z^6$, post $+y$ in $z^2 - 2z^4$, post $-8 + z^2 - 4z^4$. Et hanc tantum Aequationem $\frac{1}{5}z^6y^3 - \frac{1}{2}z^4y^3 + z^2y^3 - 2z^6y^2 + 2z^4y^2 - z^2y^2 - 2z^4y + 2z^2y - 4z^4 + z^2 - 8 = 0$ resolvendam sumo, siquidem $2z^{\frac{2}{3}}$ (primus nempe quotientis terminus) pro y in reliqua Aequatione per $z^{\frac{2}{3}}$ depressa substitutus, dat plures ubiq; quam quatuor dimensiones.

Luc

Quae de alioribus Aequationibus dixi, ad Quadraticas etiam applicari possunt. Quomodo si hujus

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{yy}{4a^2} \text{ in } a+x+\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{a^2}+\frac{x^4}{a^3} \text{ & c.} \\ +\frac{x^4}{4a^2} \end{array} \right.$$

radicem ad usq. periodum x^6 desideram, mitto terminos in infinitum post y in $a+x+\frac{x^2}{a}$, et isthanc tantum $y^2 - ay - xy + \frac{x^2}{a}y + \frac{x^4}{4a^2} = 0$. Sive id fiat hac lege $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{2a} - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{4}x^2 + \frac{x^3}{2a}}$, ut solet sive expeditius per Methodum de affectis Aequationibus jam traditam resolvo: et exit $y = \frac{x^4}{4a^3} - \frac{x^5}{4a^4}$ *, ultimo desiderato termino existente nullo.

Postquam vero radices ad convenientem periodum extracta sunt, possunt aliquando ex Analogia ferri observata ad placitum produci. Sic hanc $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5$ &c. (radicem Aequationis infinitae $x = y + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{3}y^3$ &c.) propterea produces dividendo ultimum terminum per hos ordine numeros 2, 3, 4, 5, 6, 7 &c. Et hanc $x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9$ &c. dividendo per hos $2 \times 3, 4 \times 5, 6 \times 7, 8 \times 9$ &c. [Et hanc $a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$, &c. multiplicando per hos $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{16}$, &c.] Et sic in alijs.

Ceterum in inventionem primi termini quotientis et nonnunquam secundi tertijve difficultas etiamnum evadenda super est. Potest enim valor ejus secundum praecedentia quatuor esse surda sive irrationabilis radice Aequationis multipliciter affectae. Quod cum accidit, modo non sit insuper impossibile, illum litera aliqua designabis, dein operabere, tanquam si cognitum haberes. Quomodo in Exemplo $y^3 + acy + a^2y - x^3 - 2a^3 = 0$, si radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$ fuisset surda vel ignota, fincissimam quamlibet (b) pro ea ponendam esse, et resolutionem (puta ad tertiam Dimensionem quotientis) ut sequitur perfecissem.

$$\begin{array}{l} b + p = y \\ + y^3 \\ + b^3 + 3b^2p + 3bp^2 + p^3 \\ + acy \\ + a^2y \\ - x^3 \\ - 2a^3 \end{array} \quad \begin{array}{l} b - \frac{abx}{c^2} + \frac{a^2bx^2}{c^2} + \frac{x^3}{c^2} + \frac{a^3b^2x^3}{c^2} - \frac{a^5bx^3}{c^2} + \frac{6a^4b^2x^3}{c^{10}} \end{array}$$

Scilicet b in quotiente, suppono $b+p=y$ et pro y substituo ut vides, unde prodit $p^3 + 3bp^2$ &c. rejectis terminis $b^3 + a^2b - 2a^3$ qui nihilo sunt aequales propterea quod b supponitur radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$ deinde termini $3b^2p + a^2p + abx$ dant $\frac{-abx}{3b^2+a^2}$ quotienti apponendum $\frac{-abx}{3b^2+a^2} + q$ substituendum pro p.

Brevitatis

Brevitatis autem gratia scribo cc pro $3bb + aa$, cavendo tamen ut $3bb + aa$ restitatur ubi terminos sic abbreviari posse percipiam. Completo opere assumo Numerum aliquem pro a , et hanc $y^3 + a^2y - \text{---}^3 = 0$ (sicut de numerali Aequatione ostensum supra) resolvo, et quamlibet ejus radicem (modo tres habet) pro b substituo. Vel potius hujusmodi Aequationes a Speciebus, ut possum, libero, praesertim ab indefinita, idque pro more quem volui inuere pag. Lin. Et pro --- teris tantum (si quae supersint indelebiles) pono Numeros. Sic $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$ liberabitur ab a dividendo radicem per a , fitque $y^3 + y - 2 = 0$ cujus inventa radix ducta in a substitui debet pro b .

Hactenus indefinitam Speciem supposui --- esse. Quod si data quantitati vicina supponatur pro indefinita parva differentia pono Speciem aliquam, et hanc substituta solvo ut ante. Quomodo in $\frac{1}{2}y^5 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + y - a - x = 0$, cognitis vel sitis x esse ejusdem prope quantitatis ac a , pono z differentiam inter ea, et scribendo $a + z$, vel $a - z$ pro x , orietur $\frac{1}{2}y^5 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + y - \text{vel} + z = 0$ Solvendum ut in precedentibus.

Si autem Species illa supponatur indefinita magna, pro reciproca ejus indefinita parva pono Speciem aliquam, qua substituta solva ut ante. Sic habito $y^3 + y^2 + y - x^3 = 0$ ubi x cognoscitur vel fingitur esse valde magnum pro reciproca parva $\frac{a}{x}$ pono z , et substituto $\frac{a}{z}$ pro x , orietur $y^3 + y^2 + y - \frac{1}{z^3} = 0$, cujus radix est $\frac{1}{z} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}z + \frac{7}{81}z^2 + \frac{5}{81}z^3$ &c. et x si placet restituito fit $y = x - \frac{1}{3} - \frac{2}{9x} + \frac{7}{81x^2} + \frac{5}{81x^3}$ &c.

Si quando ea aliqua harum trium suppositionum res non omnino aut non commode succedat, ad aliam recurri potest. Sic in $y^4 - x^2y^2 + xy^2 + 2y^2 - 2y + 1 = 0$ cum prius terminus obtineri deberet fingendo $y^4 + 2y^2 - 2y + 1 = 0$ quae tamen nullam admittit possibilem radicem, tento quid fiet aliter: quemadmodum si fingam x parvi differre $a + z$, sive esse $z + z = x$, substituendo $z + z$ vice x prodibit $y^4 - z^2y^2 - 2zy^2 - 2y + 1 = 0$ et quotiens exordietur ab $+1$. Vnde si fingam x indefinita magnam esse, sive $\frac{a}{x} = z$, obtinebitur $y^4 - \frac{z^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 2y - 2y + 1 = 0$, $z + z$ pro initio quotientis.

Et hac ratione secundum varias Hypotheses procedendo, licebit varijs modis extrahere ac designare radices.

Quod si capias exprimere quot modis id potest fieri, tentabis quanam quantitates pro indefinita Specie in Aequationem propositam substituta afficient divisibilem per $y +$ vel $-$ aliqua quantitate, vel per y solum. Id quod vultis gratia in Aequatione $y^3 + axy + a^2y - x^3 - 2a^3 = 0$ eveniet, substituendo $+a$, vel $-a$ vel $-2a$ vel $-2a^{\frac{1}{3}}$ &c. pro y . Atque ita possis commode supponere quantitatem x parvam ab $+a$, vel $-a$, vel $-2a$, vel $-2a^{\frac{1}{3}}$ differre, et inde radicem proposita Aequationis tot modis extrahere. Imò et fortasse tot alijs modis fingendo differentias istas esse indefinitas magnas. Quinetiam si aliam atque aliam e speciebus radicem deficientibus pro indefinita adhibeas, possis alijs adhuc fortasse modis

propropi

propositum consequi; et etiamnum alijs substituendo valores quacunque ratione fictos (quales sunt $ax + bx^2, \frac{a}{b+x}, \frac{a+cx}{b+x}$) pro indefinita specie. & in Equatione resultante operando sicut in precedentibus.

Ceterum ut Conclusionum veritas constet quotientes nempe sic extractos, dum producantur, ita proprius ad radicem accedere, ut minus tandem quavis data quantitate differant, adeoque in infinitum productos non omnino differre: perpende quod quantitates in sinistra Columna dextrae partis Diagrammatur, sint ultimi termini Equationum quarum p, q, r, s &c. existunt radices et inde quod ipsis evanescentibus, illae p, q, r, s id est differentiae inter quotientem et quaesitam radicem simul evanescent. Adeoque quotiens tunc non differt a radice. Quamobrem sub initio operis si terminos indicata Columna vere omnes destruere videas, conclude quotientem catinus extractam esse justam radicem. Sin aliter, videbis tamen terminos in quibus indefinite parva Species est pauciorum Dimensionum, id est, longe maximos. Columna ista perpetuo tolli, ut tandem non restent, nisi data quavis quantitate minores, et proinde non majores nihilo cum opus infinite producat. Quare quotiens infinite extracta fiet etiam justa Radix.

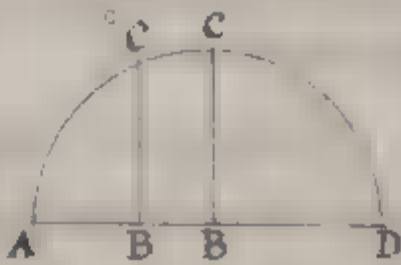
[Et si denique Species quas haecenus perspicuitatis gratia supponi indefinite parvas esse, quantumvis magna supponentur, tamen vera erunt quotientes ut minus cito ad justam radicem convergant quemadmodum — Analogia rei constet. Sed hic Radicum termini maximaque et minima quantitates spectanda veniunt. Nam infinitarum cum finitis Equationibus communia sunt hujusmodi Symptomata. Radix autem in his maxima fit vel minima quando maxima, vel minima est differentia Summa affirmativorum terminorum a Summa negativorum, ac terminatur cum indefinita quantitas (quam ideo parvam esse non immerito finxi) non potest major fieri quin magnitudo radicis in infinitum prosiliat, hoc est fiat impossibilis. Verbi gratia posito ACD semicirculo super Diametro AD descripto, et BC Ordinationem applicata:

Die $AB = x, BC = y, AD = a$, et erit $y = (\sqrt{ax - xx}) = \sqrt{ax} - \frac{x}{2a} \sqrt{ax} - \frac{x^2}{8a^2} \sqrt{ax} - \frac{x^3}{16a^3} \sqrt{ax}$ &c. ut supra. Fit ergo —

BC sive y maxima cum \sqrt{ax} maxime superat omnes $\frac{x}{2a} \sqrt{ax} + \frac{x^2}{8a^2} \sqrt{ax} + \frac{x^3}{16a^3} \sqrt{ax}$ &c. id est, cum sit $x = \frac{1}{2}a$: terminabitur autem cum sit $x = a$, quia si sumas $x < a$ Summa omnium terminorum

$-\frac{x}{2a} \sqrt{ax} - \frac{x^2}{8a^2} \sqrt{ax} - \frac{x^3}{16a^3} \sqrt{ax}$ &c. erit infinita. Est et alius terminus cum ponitur $x = 0$ propter impossibilitatem radicalis $\sqrt{-ax}$:

Quibus terminis correspondent semicirculi limites A et B.]



Probl. 1.

Relatione Quantitatum Fluentium inter se data,
Fluxionum relationem determinare.

Solutio.

Aequationem qua data relatio exprimitur dispone secundum Di-
mensiones alicujus fluentis quantitatis puta x , ac terminos ejus mul-
tiplica per quamlibet Arithmeticae Progressionem ac deinde per $\frac{x}{x}$.
Et hoc opus in qualibet fluenti quantitate seorsim institue. Dein omnium
factorum Summam pone nihilo aequalem, et habes Aequationem desideratam.

Exemp. 1.

Si x et y relatio sit $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$; terminos primo secun-
dum x ac deinde y dispositos multiplico ad hunc modum.

Mult. $x^3 - ax^2 + axy - y^3$. per $\frac{3x}{x} \cdot \frac{2x}{x} \cdot \frac{x}{x} \cdot 0$. fit $3xx^2 - 2axx + xay \cdot *$	Mult. $-y^3 + axy - axx$ per $\frac{3y}{y} \cdot \frac{y}{y} \cdot 0$. fit $-3yy^2 + ayy \cdot *$
---	--

Et factorum Summa est $3xx^2 - 2axx + ayy - 3yy^2 + ayy = 0$
 Aequatio qua dat relationem inter Fluxiones \dot{x} & \dot{y} . Nempe si assumes x
 ad arbitrium, Aequatio $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ dabit y . Quibus determinati
 erit $\dot{x} : \dot{y} :: 3y^2 - ax : 3x^2 - 2ax + ay$.

Exemp. 2.

Si quantitatum x, y et z relatio sit $2y^3 + x^2y - 2xy^2 + 3yz^2 - z^3 = 0$.

Mult. $2y^3 + x^2y - 2xy^2$ $- 2xy^2$ $+ 3z^2$ per $\frac{2y}{y} \cdot 0 \cdot \frac{y}{y}$. fit $4yy^2 \cdot * + \frac{y^2z^2}{y}$	Mult. $x^2y + 2y^3$ $- 2xy^2$ $+ 3yz^2$ $- z^3$ per $\frac{2x}{x} \cdot 0 \cdot \frac{y}{y}$. fit $2xxy \cdot *$	Mult. $-z^3 + 3yz^2 - 2xy^2 + x^2y$ $+ 2y$ per $\frac{3z}{z} \cdot \frac{2z}{z} \cdot \frac{z}{z} \cdot 0$. fit $-3zz^2 + 6zyz - 2czy \cdot *$
--	--	--

Quare fluendi celeritatum \dot{x}, \dot{y} & \dot{z} relatio est $4yy^2 + \frac{y^2z^2}{y} + 2xxy - 3zz^2 + 6zyz - 2czy = 0$.

Ceterum cum tres sint hic fluentes quantitates x, y & z , debent alia
 in super Aequatio dari qua relatio inter ipsas ut et inter earum Fluxiones
 positus determinetur. Quemadmodum si ponitur $x + y - z = 0$. Exinde -
 Fluxionum alia relatio juxta Regulam erit $\dot{x} + \dot{y} - \dot{z} = 0$. Confer jam hasce
 cum precedentibus Aequationibus, eliminando quamlibet e tribus quantitatibus
 et quamlibet etiam e tribus earum fluxionibus et reliquorum relationes peni-
 tius determinatas obtinebis.

Sigando

Si quando in Aequatione proposita insint Fractiones complexae aut Surdae quantitates, pro Singulis pono totidem Literis, easq; fingens designare quantitates fluentes, operor ut ante. Dein supprimo et extermino literas ascriptas, ut hic videre est.

Exemp. 3.

Si quantitarum x et y relatio. Sit $yy - aa - x\sqrt{aa - xx} = 0$: pro $x\sqrt{aa - xx}$ scribo z , et inde habeo duas Aequationes $yy - aa - z = 0$, et $aa\dot{x}x - x^4 - z\dot{z} = 0$, quarum prior ut ante dabit $2yy - \dot{z} = 0$, pro relatione celeritatum y & \dot{z} , et posterior dabit $2aa\dot{x}x - 4x^3\dot{x} - \dot{z}z = 0$, sive $\frac{aa\dot{x}x - 2x^3\dot{x}}{z} = \dot{z}$ pro relatione celeritatum x et \dot{z} . Tam \dot{z} suppresso fiet $2yy - \frac{aa\dot{x}x + 2x^3\dot{x}}{\sqrt{aa - xx}} = 0$, relatio inter x & y qua quarebatur.

Exemp. 4.

Si $x^3 - ay^2 + \frac{by^3}{a+y} - xx\sqrt{ay+xx} = 0$, designat relationem inter x & y : pono z pro $\frac{by^3}{a+y}$, et v pro $xx\sqrt{ay+xx}$ et inde nactus sum tres Aequationes $x^3 - ay^2 + z - v = 0$, $ax + yz - by^2 = 0$ et $aa^4y + x^6 - vv = 0$. Prima dat $3x^2\dot{x} - 2a\dot{y}y + \dot{z} - \dot{v} = 0$, Secunda dat $a\dot{x} + \dot{z}y + y\dot{z} - 3b\dot{y}y^2 = 0$, et Tertia dat $4aa^4x^3y + 6x^5\dot{x} + a\dot{y}x^4 - 2v\dot{v} = 0$, pro relationibus celeritatum v , \dot{x} , y & \dot{z} . Ipsorum vero \dot{z} & \dot{v} valores per Secundam ac Tertiam inven- tos (nempe $\frac{3b\dot{y}y^2 - y\dot{z}}{a+y}$ pro \dot{z} , et $\frac{4aa^4x^3y + 6x^5\dot{x} + a\dot{y}x^4}{2v}$ pro \dot{v}) substituo in primam et oritur $3x^2\dot{x} - 2a\dot{y}y + \frac{3b\dot{y}y^2 - y\dot{z}}{a+y} - \frac{4aa^4x^3y + 6x^5\dot{x} + a\dot{y}x^4}{2v} = 0$. Et vice \dot{z} & \dot{v} repositis valoribus $\frac{by^3}{a+y}$ & $x^2\sqrt{ay+xx}$ prodit Aequatio quaerita.

$$3x^2\dot{x} - 2a\dot{y}y + \frac{3ab\dot{y}y^2 + 2b\dot{y}y^3}{aa + 2ay + yy} - \frac{4aa^4y - 6x^3\dot{x} - a\dot{y}xx}{2\sqrt{ay+xx}} = 0$$
, qua relatio celeritatum x & y designatur.

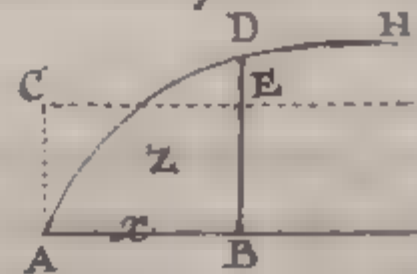
Quo pacto in alijs Casibus operandum est, quemadmodum cum in Aequatione proposita reperiuntur Surdi Denominatores Radicales Cubici, radicales infra Radicales ut $\sqrt{aa + \sqrt{aa - xx}}$ aut alij ejusmodi perplexi termini, ex his credo manifestum esse.

Quinimo si in Aequatione Quantitatis involvantur quae nullâ ratione Geometricâ determinari, et exprimi possunt, quales sunt Areae vel Longitudines Curvarum: tamen relationes Fluxionum hâc Secus investigantur, prout in Exemplo sequente constabit.

Preparatio

Preparatio in Exemplum 5.

Pone BD Ordinationem est in Angulo Recto ad AB , et quod ADH sit Curva que per relationem inter AB & BD Aequatione qualibet exhibitam definitur. AB vero dicatur x , et Curva Area ADB ad unitatem applicata dicatur z . Dein erige Perpendicularum AC aequale unitati, et per C duc CE parallelam AB et occurrentem BD in E , et concipiendo has duas Superficies ADB & $ACEB$ genitas esse per motum rectae BED , manifestum erit quod ~~fluens~~ Fluxiones (hoc est Fluxiones quantitatum $1 \times z$ & $1 \times x$, sive quantitatum z & x) sunt inter se ut BD & BE Lineae generantes. Est ergo $z : x :: BD : BE$ sive 1. adeoque $z = \dot{x} \times BD$.



Et hinc fit quod z in Aequatione qualibet designante relationem inter x et aliam quamvis fluentem quantitatem y involvi potest, et tamen Fluxionum \dot{x} & \dot{y} ratio nihil minus inveniri.

Exempl. 5.

Quemadmodum si proponitur $z^2 + axz - y^4 = 0$ pro designanda relatione inter x & y , ut et $\sqrt{ax - xx} = BD$ pro Curva determinanda qua proin erit Circulus: Aequatio $z^2 + axz - y^4 = 0$ sicut in precedentibus debet $z\dot{z} + a\dot{x}z + a\dot{x}z - 4y^3\dot{y} = 0$, pro relatione celeritatum \dot{x} , \dot{y} & \dot{z} . Et praeterea cum sit $z = \dot{x} \times BD$ sive $\dot{x} \sqrt{ax - xx}$ pro eo substitue hunc valorem et orietur $2\dot{x}z + a\dot{x}x \sqrt{ax - xx} + a\dot{x}z - 4y^3\dot{y} = 0$ Aequatio definient relationem celeritatum \dot{x} & \dot{y} .

Demonstratio.

Fluentium quantitatum momenta (i.e. earum partes infinite parva quarum additamento per singula temporis infinite parva spatia augentur,) sunt ut Fluendi celeritatis.

Quare si cujusvis ut x momentum per factum ex ejus celeritate \dot{x} et infinite parva quantitate o (i.e. per $\dot{x}o$) designetur, ceterorum y, z , momenta per $\dot{y}o, \dot{z}o$, designabuntur, siquidem $\dot{y}o, \dot{z}o$, sunt inter se ut $\dot{y}, \dot{x}, \dot{z}$.

Iam cum quantitatum fluentium (ut x & y) momenta ut $\dot{x}o$ & $\dot{y}o$ sint additamenta infinite parva quibus illa quantitates per singula temporis infinite parva intervalle augentur, sequitur quod quantitates illae x & y post quodlibet infinite parvum temporis intervallum futurae sunt.

sunt $x + x_0$ et $y + y_0$. Et inde Aequatio quae relationem quantitatum Fluentium ad omne Tempus indifferenter designat, aequae designabit relationem inter $x + x_0$ et $y + y_0$, ac inter x & y : adeo ut $x + x_0$ et $y + y_0$ pro quantitibus istis vice x et y in dictam Aequationem substitui possint.

Detur itaq; qualibet Aequatio $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ et substitue $x + x_0$ pro x , et $y + y_0$ pro y , et emerget

$$\left. \begin{aligned} &x^3 + 3x_0x^2 + 3x^2x_0x + x^3x_0^3 \\ &- ax^2 - 2axx_0 - ax^2x_0 \\ &+ axy + ax_0y + a_1yx + ax_1y_0 \\ &- y^3 - 3y_0y^2 - 3y^2y_0 - y^3y_0^3 \end{aligned} \right\} = 0$$

Nam ex Hypothesi sunt $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ quibus detectis, et reliquis terminis per 0 divisis restabunt $3x^2x_0 + 3x^2x_0x + x^3x_0^3 - 2axx_0 - ax^2x_0 + ax_0y + a_1yx + ax_1y_0 - 3y_0y^2 - 3y^2y_0 - y^3y_0^3 = 0$. Et insuper cum 0 supponitur esse infinite parvum, eo ut momenta quantitatum designare possit; termini per illud multiplicati respectu ceterorum nihilo valebunt. Rejicio itaq; et restat $3x^2x_0 - 2axx_0 + ax_0y + a_1yx - 3y_0y^2 = 0$, ut supra in Exempl. 1.

Hinc observare est quod termini non multiplicati per 0 semper evanescent, ut et illi multiplicati per \square plusquam unius dimensionis. Et quod reliquorum terminorum per 0 divisionum \square semper erit forma quoniam juxta Regulam habere debent. Id quod volui ostendere.

Ex hoc monstrato cetera quae Regula involvit facili consequentur, quemadmodum quod in Aequatione proposita plures Fluente quantitates involvi possunt, et quod termini \square modo per numerum Dimensionum quantitatum Fluentium sed per quolibet alias Arithmeticas Progressiones multiplicari possunt dummodo in Operatione juxta quamlibet Fluente quantitatem, sit eadem terminorum differentia, et progressio secundum eundem cujusque Dimensionum ordinem disponatur. Et his concessis quae praeterea in Exempla 3, 4 & 5 docentur per se manifesta sunt.

Hactenus de modis computandi quorum post hac frequens erit usus. Jam restat ut in illustrationem Artis Analyticae tradam aliquot Problematum Specimina qualia praesertim natura quæstionum ministrabit. Sed imprimis observandum venit quod hujusmodi difficultates possunt omnes ad hæc duo tantum Problemata reduci quæ circa Spatium motu locali utcumq; Accelerato vel Retardato descriptum proponere licebit.

1. Spatii Longitudinem continuè (sive ad omne tempus) data Celeritate motus ad tempus propositum invenire.
2. Celeritate motus continuè data Longitudinem descripti Spatii ad tempus propositum invenire.

Sic in Aequatione $xx = y$, si y designat Spatii Longitudinem ad quodlibet tempus quod aliud Spatium x uniformi Celeritate x crescendo mensurat et exhibet descriptam: tunc $2xx$ designabit celeritatem qua Spatium y ad idem temporis momentum describi pergit; et contra. Et hinc est quod in sequentibus considerem Quantitates quasi generatas essent per incrementum continuum ad modum Spatii quod mobile percurrente describit.

Cum autem temporis nullam habemus estimationem nisi quatenus id per æquabilem motum localem exponitur et mensuratur, et præterea cum quantitates ejusdem tantum generis inter se conferri possunt et earum incrementi et decrementi celeritates inter se ea propter ad tempus formaliter spectatum in sequentibus haud respiciam, sed expropositis quantitatibus quæ sunt ejusdem generis aliquam æquabili Fluxione, augeri fingam cui cæteræ tanquam temporis referantur, adeoque cui nomen temporis analogice tribui mereatur. Siquando itaq; vocabulum temporis in sequentibus occurrat (quemadmodum perspicuitatis et distinctionis gratia nonnunquam intorteari) eo nomine non tempus formaliter spectatum subintelligi debet sed illa alia quantitas cujus æquabili incremento sive Fluxione tempus exponitur et mensuratur.

Quantitates autem quas ut sensim crescentes indefinitè considero, quo distinguam ab alijs quantitatibus quæ in Aequationibus quibuscumq; pro determinatis et cognitis habenda sunt ac initialibus literis $a, b, c, &c$ designantur, posthac denominabo Fluentes, ac designabo finalibus literis v, x, y et z . Et celeritates quibus singula a motu generante fluunt et augentur (quas possum Fluxiones vel simpliciter Celeritates vocitare) designabo literis $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}$ et \dot{z} nempe pro Celeritate quantitatis v ponam \dot{v} , et sic pro Celeritatibus aliarum quantitatum x, y & z , ponam \dot{x}, \dot{y} & \dot{z} respective.

His præmissis, e vestigio ~~in~~ aggredior imprimis duorum jam modo propositorum Problematum Solutionem exhibiturus.

Prob. 2.

Probl. 2.

Exposita Equatione Fluxiones quantitatum involvente, invenire relationem quantitatum inter se.

Solutio Particularis.

Cum hoc Problema sit precedentis conversum, contrario modo solvi debet: Ut propterea terminos per x multiplicatos disponendo secundum Dimensiones ipsius x , dividendoq; per $\frac{x}{2}$, ac deinde per Numerum Dimensionum aut fortasse per aliam Arithmeticam Progressionem. Atq; idem opus in terminis per y , y^2 vel z multiplicatis instituendo, et resultantium summam rejectis terminis redundantibus, ponendo aequalem nihilo.

Exempl.

Sic exposita Equatione $3xxx - 2axx + axy - 3yyy + ayx = 0$;
Operor ad hunc modum:

Divido $3xxx - 2axx + axy$	Divido $-3yyy + ayx$
per $\frac{x}{2}$ fit $3x^2 - 2axx + axy$	per $\frac{y}{2}$ fit $-3y^2 + axy$
Dein div: per 3 . 2 . 1	div: per 3 . 1
Et fit $x^3 - ax^2 + axy$	fit $-y^3 + axy$

Et Summa $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ erit relatio desiderata quantitatum x & y . Ubi observandum venit quod etri terminus axy bis resultavit, tamen non pono bis in hac Summa $x^3 - ax^2 + axy - y^3$, sed redundantem terminum rejicio. Et sic ubicunq; terminus aliquis bis resultat (aut saepius si de pluribus Fluxionibus quantitatum agitur) semel tantum in Summa terminorum scribo.

Sunt et aliae circumstantiae quas Artificis ingenio pro re nata observandas esse remitto; nam supervacaneum esset his multa verba impendere, siquidem Problema non semper potest hoc Artificio solvi. Addo tamen quod postquam Artifex relationem fluentium quantitatum hac methodo adeptus est, si iuxta Prob. 1. potest regredi ad expositam Equationem Fluxiones involventem recte operatus est; sin secus, vitiosum. Sic in Exemplo proposito ubi Equationem $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ adeptus sum si relatio inter x & y ope primi Problematis vicissim inde requirantur, obtinebitur Equatio exposita $3xx^2 - 2axx + axy - 3yy^2 + ayx = 0$. Unde constat Equationem $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ recte inventam fuisse. At si Equatio $x - xy + yx = 0$ exponeretur, et inde praescripta methodo elicerem $\frac{1}{2}xx - xy + ay = 0$, pro relatio inter x & y , vitiosa foret.

seret operatio siquidem eainde per prob. 1. vicissim produceretur
 $xx - xy - yx + ya = 0$, quæ differt ab Equatione primo exposita.

Hæc itaq; perfunctorie notata præmittens, Solutionem generalem aggredior.

Preparatio in generalem Solutionem.

Et imprimis observandum est quod in exposita Equatione Symbola Fluxionum (cum sint Quantitates diversi generis a quantitatibus quarum sunt Fluxiones) in singulis terminis debent ad æque-multas Dimensiones ascendere. Et ubi res aliter se habet, alia alicujus Fluentis quantitati Fluxio subintelligi debet esse unitas per quam termini depreffiones toties multiplicantur ut in omnibus Symbola Fluxionum ad eundem Dimensionum gradum ascendant. Quomodo si exponitur Equatio $x + xix - axx = 0$, tertia alicujus Fluentis quantitati est x , fluxio \dot{x} subintelligi debet esse unitas per quam primus terminus x semel et ultimus axx bis multiplicetur ut Fluxiones inibi ad æque-multas Dimensiones ac in secundo termino xix ascendant quasi exposita Equatio ex hac $\dot{x}x + xix - xixx = 0$ derivata fuisset ponendo $\dot{x} = 1$. Et sic in Equatione $yx = yy$ debes imaginari \dot{x} esse unitatem per quam terminus yy multiplicetur.

Equationes autem in quibus dua tantum sunt Fluente Quantitates quæ ad æque-multas Dimensiones possunt ascendunt, semper possunt ad talem formam reduci ut ex una parte habeatur Ratio Fluxionum (velut $\frac{\dot{y}}{x}$ vel $\frac{\dot{x}}{y}$ vel $\frac{\dot{z}}{x}$, &c) et ex altera parte valor ejus rationis simplicibus terminis Algebraicis designatus, sicut hic videre est $\frac{\dot{y}}{x} = 2 + x - y$. Et ubi Equationibus præcedens particularis Solutio non satisfacit, requiritur ut ad hanc formam reducat.

Quamobrem cum in illius rationis valore terminus aliquis a composita quantitate denominetur vel sit radicalis vel si ratio illa sit Equationis radix affecta: reductio vel per divisionem vel extractionem radices, vel Equationis affecta resolutionem institui debet, prout in superioribus ostensum est.

Quomodo si exponitur $ya - yx - xa + xax - xy = 0$. Hæc imprimis reductione vel fit $\frac{\dot{y}}{x} = 1 + \frac{y}{a-x}$, vel $\frac{\dot{x}}{y} = \frac{a-x}{a-x+y}$. Et in priori casu si terminus $\frac{y}{a-x}$ a composita quantitate $a-x$ denominatur reduce ad infinitam Seriem simplicium terminorum $\frac{y}{a} + \frac{xy}{a^2} + \frac{xxy}{a^3} + \frac{x^2y}{a^4}$ &c dividendo Num. totum y per Denominatorem $a-x$, obtinebo $\frac{\dot{y}}{x} = 1 + \frac{y}{a} + \frac{xy}{a^2} + \frac{x^2y}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4}$ &c ejus ope relatio inter x & y determinanda est. Sic

Sic exposita $xy = xy + xxx$, sive $\frac{y}{x} = \frac{y}{x} + xx$, et ulteriori re-
ductione $\frac{y}{x} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + xx}$. Radicum Quadraticum e terminis $\frac{1}{4} + xx$
extraho et obtineo infinitam Seriem $\frac{1}{2} + xx - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10}$ &c.
quam pro $\sqrt{\frac{1}{4} + xx}$ substituendo prodit $\frac{y}{x} = 1 + x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8$ &c. vel $\frac{y}{x} = -$
 $x^2 + x^4 - 2x^6 + 5x^8$ &c. prout $\frac{y}{x} + xx$ additur vel subducitur a $\frac{1}{2}$.

Atq; ita si exponitur $y^3 + ax^2y + a^2x^2y - x^3 - 2a^3a^2 = 0$.
sive $\frac{y^3}{x^3} + ax\frac{y}{x} + \frac{y}{x} - \frac{1}{x^3} - 2a^2 = 0$ extraho radicem Cubicæ affectam,
et prodit $\frac{y}{x} = a - \frac{a}{x} + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^5}{16384a^3}$ &c. prout videtur est ad pag.

Cæterum hic observandum venit quod terminos solvendo pro
compositis habeo qui ex parte fluentium quantitatum componuntur.
Terminos ubi nulla est nisi ex parte datarum quantitatum compo-
sitis pro simplicibus habeo, siquidem ad simplices reduci possunt
figendo æquales esse alijs datis. Sic quantitates $\frac{ax+bx}{c}$, $\frac{x}{a+b}$, $\frac{bx}{ax+bx}$,
 $\frac{b^4}{axx+bx^2}$, $\frac{va}{x+bx}$, &c. pro simplicibus habeo siquidem ad simplices
 $\frac{1}{x}$, $\frac{x}{x}$, $\frac{bx}{x}$, $\frac{b^4}{x^2}$ &c. sive $\frac{1}{x}$, $\frac{b^4}{x^2}$ &c. reduci possunt figendo esse
 $a+b = x$.

Præterea quo fluentes quantitates a se invicem clarius dis-
tinguantur, fluxionem quæ in Numeratori Rationis disponitur, sive
Antecedentem Rationis hanc improprie Relatam Quantitatem Nomi-
nare possum, et alteram ad quam refert, Correlatam: ut et fluentes
Quantitates ipsæ respective nominibus insignire. Et quo sequentia
promptius intelligantur, possum imaginari Correlatam Quantitatem
esse Tempus vel potius aliam quamvis æquabiliter fluentem quantitatem
quæ Tempus exponitur et mensuratur; et alteram sive Relatam Quanti-
tatem esse Spatium quod mobile utrunq; acceleratum vel retardatum in
illo tempore transigit. Et quod problematis intentio est ut e Celeritate motus
ad omne tempus datæ Spatium in toto tempore transactum determinetur.

Craterum Equationes respectu hujus Problematis in tres ordines
distingui convenit. 1. In quibus duæ quantitates Fluxiones et alterutra
tantum fluens quantitas involvuntur.

2. In quibus duæ involvuntur fluentes quantitates una
cum eam fluxionibus.

3. Quæ plures duabus quantitatum fluxionibus complectuntur.
Et his præmissis problematis perfectionem secundum hosce tres casus
aggredior.

Solutionis Cas: 1.

Fluentem quantitatem, quam unice. Equatio complectitur suppone Correlatam esse, et Equatione perinde disposita (hoc est faciendo et ex una parte habetur fluxionis alterius ad hujus fluxionem Ratio, et valor ejus in simplicibus terminis ex altera) multiplica valorem Ratio fluxionum per Correlatam Quantitatem, dein singulos ejus terminos divide per numerum dimensionum, quibus illa quantitas inibi afficitur, et quod oritur valebit altera Fluenti Quantitate.

Sic exposita $xy = ax + x^2ax$, suppono x esse Correlatam Quantitatem et Equatione perinde reducta habebitur $\frac{y}{x} = 1 + x^2 - x^4 + 2x^6$ &c. Jam duco valorem $\frac{y}{x}$ in x et oritur $x + x^3 - x^5 + 2x^7$ &c. quos terminos sigillatim per Numerum dimensionum divide et exitum $x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7$ &c. pono $= y$. Et istha Equatione desiderata relatio inter x & y determinatur.

Sic habita $\frac{y}{x} = a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512aa}$ &c. prodibit $y = ax - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{192a} + \frac{131x^4}{2048a^2}$ &c. pro determinanda relatione inter x & y .

Et sic Equatio $\frac{y}{x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{a}{x^6} - x^2 + ax^4$, dat $y = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + 2ax^3 - \frac{3}{2}x^5 + \frac{5}{2}x^7$. Nam valorem $\frac{y}{x}$ ducto in x , et fit $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + ax^5 - x^3 + x^7$ vive $x^{-2} - x^{-4} + ax^4 - x^2 + x^6$. Quibus terminis per numerum dimensionum divisus emergit valor assignatus y .

Ad eundem modum Equatio $\frac{y}{x} = \frac{2b^2}{\sqrt{ay}} + \frac{3y^2}{a+b} + \sqrt{by+cy}$, dat $x = -\frac{4b^2c}{\sqrt{ay}} + \frac{y^3}{a+b} + \frac{3}{2}\sqrt{by^2+cy^3}$. Nam valore $\frac{y}{x}$ ducto in y oritur $\frac{2b^2c}{\sqrt{ay}} + \frac{3y^3}{a+b} + \sqrt{by^3+cy^4}$ live $2b^2cx^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{a+b}y^{\frac{3}{2}} + \sqrt{b+c}xy^{\frac{3}{2}}$. Et inde prodit valor x , dividendo per numerum Dimensionum cujusq. termini.

Atq. ita $\frac{y}{x} = 2x^{\frac{2}{3}}$, dat $y = \frac{2}{3}x^{\frac{5}{3}}$. Et $\frac{y}{x} = \frac{ab}{cx^3}$, dat $y = \frac{3abx^{\frac{4}{3}}}{2c}$.

At Equatio $\frac{y}{x} = \frac{a}{x}$ dat $y = a$. Nam $\frac{a}{x}$ ductum in x fit a , quo per Numerum Dimensionum (qui nullus est) divisus prodit $\frac{a}{0}$ quantitas infinita pro valore y .

Quamobrem si quando consimilis terminus (cujus Denominator involvit Correlatam Quantitatem unius tantum Dimensionis) in valore $\frac{y}{x}$, reperitur, pro Correlata Quantitate substitue Summam vel differentiam inter eandem et aliam quamvis datam quantitatem pro arbitrio assumptam. Nam quantitatum fluentium iuxta procedentem Equationem eadem erit inter se fluendi relatio ac iuxta Equationem primo expositam et infinita quantitas Relato hoc pacto parte infinita diminuetur et evadet finita, sed terminis tamen numero infinitis constans.

Equatione itaq. $\frac{y}{x} = \frac{a}{x}$, exposita, si pro x scribam $b+x$, quantitatem b pro lubitu assumens; prodibit $\frac{y}{x} = \frac{a}{b+x}$; factaq. Divisione $\frac{y}{x} = \frac{a}{b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{ax^2}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4}$ &c. Et inde Regula ut in Superioribus dabit $y = \frac{ax}{b} - \frac{ax^2}{2b^2} + \frac{ax^3}{3b^3} - \frac{ax^4}{4b^4}$ &c. relationem inter x & y .

Hic

Sic etiam habita Aequatione $\frac{y}{x} = \frac{2}{x} + 3 - x\alpha$. Si propter terminum $\frac{2}{x}$ scribam $1+x$ pro x , emerget $\frac{y}{x} = \frac{2}{1+x} + 2 - 2x - \alpha x$. Terminos $\frac{2}{1+x}$ in infinitam Seriem $2 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4$ &c. deducto erit $\frac{y}{x} = 4 - 4x + x^2 - 2x^3 + 2x^4$ &c. Adeoque juxta Regulam obtinebitur $y = 4x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^5$ &c. relatio inter x et y .

Atque ita si proponitur $\frac{y}{x} = x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1} - x^{\frac{1}{2}}$. Quia terminum x^{-1} (sive $\frac{1}{x}$) inesse video, transmuto x : quemadmodum pro eo substituendo $1-x$, et oritur $\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1-x} - \sqrt{1-x}$. Terminus autem $\frac{1}{1-x}$ valet $1+x+x^2+x^3$ &c. Et $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ valet $1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3$ &c. adeoque $\frac{y}{x}$ sive $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \sqrt{1-x}$ valet $1 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{8}x^2 + \frac{11}{16}x^3$ &c. Quamobrem (valoribus hinc substitutis) erit $\frac{y}{x} = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{27}{16}x^3$ &c. Et inde per Regulam fit $y = x + x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{27}{64}x^4$ &c. Et sic in alijs.

Hujusmodi etiam transmutatione Fluantis quantitatis Aequatio in alijs casibus nonnunquam commode reduci poterit. Quemadmodum si exponitur $\frac{y}{x} = \frac{c^2 - 3c^2x + 3cx^2 - x^3}{x^3}$, pro α scribo $c-x$ et obtineo $\frac{y}{x} = \frac{c^2 - c^2x}{x^3}$ sive $\frac{c^2}{x^3} - \frac{c^2}{x^2}$, et inde per Regulam: $y = -\frac{c^3}{2\alpha\alpha} + \frac{c^2}{\alpha}$. At harum transmutationum usus insequentibus magis eluceat.

Solutionis Cas: 2.

Preparatio.

Hec itaque de Aequationibus involventibus unicam tantum fluentem Quantitatem. Cum vero utraq involvitur, Aequatio imprimis ad praescriptam formam redigenda est, efficiendo scilicet ut ea ~~una~~ parte habeatur Fluationum ratio aequalis aggregato simplicium terminorum ex altera.

Est praeterea siquae sunt in Aequationibus sic reductis fractiones quae denominantur a fluenti quantitate, a denominatoribus istis liberari debent per transmutationem ejus fluentis quantitatis paulo ante commemoratam.

Sic exposita Aequatione $yx\alpha - xxy - x\alpha\alpha = 0$, sive $\frac{y}{x} = \frac{y}{\alpha} + \frac{\alpha}{x}$: (propter terminum $\frac{\alpha}{x}$) assumo b ad arbitrium, et pro x vel scribo $b+x$, vel $b-x$, vel $x-b$. Quemadmodum si scribam $b+x$, fiet $\frac{y}{x} = \frac{y}{\alpha} + \frac{\alpha}{b+x}$. Adeoque termino $\frac{\alpha}{b+x}$ in infinitam Seriem per divisionem deducto erit $\frac{y}{x} = \frac{y}{\alpha} + \frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha x}{b^2} + \frac{\alpha x^2}{b^3} - \frac{\alpha x^3}{b^4}$ &c.

Et ad eundem modum exposita Aequatione $\frac{y}{x} = 3y - 2x + \frac{x}{y} - \frac{2y}{xx}$, si (propter terminos $\frac{x}{y}$ & $\frac{2y}{xx}$) scribam $1-y$ pro y et $1-x$ pro x , orietur $\frac{y}{x} = 1 - 3y + 2x + \frac{1-x}{1-y} + \frac{2y-2}{1-2x+xx}$. Terminus autem $\frac{1-x}{1-y}$ per infinitam Divisionem dat $1-x+y-xy+y^2-xy^2+y^3-xy^3$ &c. ac Terminus $\frac{2y-2}{1-2x+xx}$ per similem Divisionem, dat $2y-2+4xy-4x+6x^2y-6x^2+8x^3y-8x^3+10x^4y-10x^4$ &c. Quare erit $\frac{y}{x} = -3x+3xy+y^2-xy^2+y^3-xy^3$ &c. $+6x^2y-6x^2+8x^3y-8x^3+10x^4y-10x^4$ &c.

Regula

Regula.

Aequationes cum opus est sic preparatae: terminos ordina iuxta Dimensiones fluentium, quantitatem ponendo imprimis non affectas Relata Quantitate, deinde affectos minima ejus dimensione, &c. sic deinceps. Terminos etiam in his singulis classibus iuxta dimensiones alterius Correlatae quantitatis pariter dispone; eosq. in prima classe (i.e. quos Relata Quantitas non afficit) scribe in Serie collateraliter deorsum pergente, et ceteros in Seribus descendentibus in sinistra Columna prout indicant subsequenter Diagrammata. Opere sic instituto primum sive depressissimum terminus in prima classe duc in Correlatam Quantitatem divideq. per numerum dimensionum, et in Quotientes pro initiali termino valoris Relatae Quantitatis reponere. Nunc deinde in Aequationis terminos in sinistra Columna dispositos pro Relata Quantitate substitue, et a terminis proximè depressissimis secundum Quotientis terminum eadem ratione quâ primum elicies. Et eadem Operatione rursus repetita Quotientem ad arbitrium producere possis. Sed res Exemplo clariùs patebit.

Exempl. 1.

Exponatur Aequatio $\frac{y}{x} = 1 - 3x + y + x^2 + xy$, cujus terminos $1 - 3x + x^2$ non affectos Relata quantitate y .

	$+ 1 - 3x + x^2$
$+ y$	$* + x - 3x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^5$
$+ xy$	$* * + 2x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{24}x^6$
Summa	$1 - 2x + 2x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{24}x^5$
y	$x - 2x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^5 - \frac{1}{240}x^6$

vides in suprema Serie collateraliter dispositos, ceterosq. y et xy in sinistra Columna. Et imprimis terminum initialem 1 duco in Correlatam quantitatem x fitq. x , quem per numerum Dimensionum 1 divisum repono in subscripta Quotiente. Dein hoc termino pro y in marginalibus, vice $+ y$ et $+ xy$, obtineo $+ x$ & $+ 2x^2$, quos e regione deorsum scribens, ex omnibus excerpso depressissimos terminos $- 3x$ & $+ x$ quorum aggregatum $- 2x$ ductum in x fit $- 2x^2$, et per Numerum Dimensionum 2 divisum dat $- x$ pro secundo termino valoris y in Quotiente. Hoc proinde termino ad complendum valorem y in marginalibus $+ y$ & $+ xy$ adscito, oriuntur praeterea $- 2x^2$ & $- x^3$ terminis prius oriundis $+ x$ & $+ 2x^2$ adnectendi. Quo facto iterum terminos proximè depressissimos $+ 2x$, $- 2x^2$ & $+ x$, in unam Summam x colligo et inde ut prius tertium terminum $\frac{1}{2}x^3$ in valore y respondendum elicio. Iterumq. $\frac{1}{2}x^3$ in marginalium terminorum valore adscito, e proximè depressissimis $\frac{1}{2}x^3$ & $- x^3$ in unum aggregatis elicio $-\frac{1}{2}x^4$ quartum terminum valoris y . Et sic in infinitum.

Exempl.

Exempl. 4.

Haec secus cum Relata quantitas factis dimensionibus afficitur
possis valorem ejus extrahere.

Veluti si proponitur $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}y - 4y^2 + 24x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}x^2 + 7y^{\frac{3}{2}} + 2y^3$, ubi x
in termino $24x^{\frac{1}{2}}$ (sive $24\sqrt{x}$) facta dimensione $\frac{1}{2}$ afficitur. Ejus $x^{\frac{1}{2}}$ valorem

	$+\frac{1}{2}y - 4y^2 + 7y^{\frac{3}{2}} + 2y^3$	
$24x^{\frac{1}{2}}$	$* + y^2 * - 2y^3 + 4y^{\frac{5}{2}} - 2y^4$	$\frac{1}{2}$
$-\frac{4}{3}x^2$	$* * * * * - \frac{16}{3}y^4$	$\frac{4}{3}$
Summa	$+\frac{1}{2}y - 3y^2 + 7y^{\frac{3}{2}} * + 4y^{\frac{5}{2}} - \frac{41}{30}y^4$	
$x = +\frac{1}{4}y^2 - y^3 + 2y^{\frac{3}{2}} * + \frac{9}{7}y^{\frac{5}{2}} - \frac{41}{100}y^5$		$\frac{1}{4}$
$x^{\frac{1}{2}} = +\frac{1}{2}y - y^2 + 2y^{\frac{3}{2}} - y^3$		$\frac{1}{2}$
$x^2 = \frac{1}{16}y^4$		$\frac{1}{16}$

e valore x paulatim
elicio (extrahendo nempe
radicem Quadraticam)
sicut in inferiori parte
Diagrammatis videre est;
eo ut in marginalis ter-
mini $24x^{\frac{1}{2}}$ valorem
gradatim transferri et

insui possit. Et sic tandem adipsam Aequationem $x = \frac{1}{4}y^2 - y^3 + 2y^{\frac{3}{2}}$
 $+\frac{9}{7}y^{\frac{5}{2}} - \frac{41}{100}y^5$ qua x respectu y indefinite determinatur.

Et sic in alijs quibuscumq; casibus operari licet.

Ceterum dixi hasce Solutiones infinitis modis prestari posse.
Et hoc fiet si non tantum initialem quantitatem supremam Series Sed et aliam
quemvis datam quantitatem pro primo termino Quotientis ad arbitrium
assumas, ac deinde opereris ut in precedentibus. Sic in primo precedentium
exemplorum. Si pro primo termino valoris y assumas 1, et pro y in terminis

	$+1 - 3x + xx$	
$+y$	$+1 + 2x * + x^3 + \frac{1}{4}x^4$	$\frac{1}{4}$
$+xy$	$* + x + 2xx * + x^4$	$\frac{1}{2}$
Summa	$+2 * + 3xx + x^3 + \frac{5}{4}x^4$	
$y = 1 + 2x * + x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5$		$\frac{1}{4}$

marginalibus ($+y$ & $+xy$) substituam
reliquamq; operationem (cujus spe-
cimen adjunxi) sicut in preceden-
tibus prosequaris ipsius y alius
exurret valor $1 + 2x + x^3 + \frac{1}{4}x^4$ &c.
Et sic in alijs atq; alijs exur-

get assumendo 2, 3 vel alium quemvis numerum pro primo ejus ter-
mino. Vel si Symbolum aliquod, ut a , pro illo termino indefinite desig-
nando usurpas, eadem operandi methodo (quam hic etiam designatum

	$+1 - 3x + xx$	
$+y$	$+a + x - xx + \frac{1}{3}x^3$ $+ ax + aax + \frac{1}{3}ax^3$	$\frac{1}{3}$
$+xy$	$* + aa + xx - x^3$ $+ aax + aa$	$\frac{1}{2}$
Summa	$+1 - 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3$ $+ a + 2ax + 2aa^2 + \frac{5}{3}aa^3$	
$y = a + x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4$ $+ ax + aax + \frac{2}{3}aa^3 + \frac{5}{12}aa^4$		$\frac{1}{3}$

habis) elicies tandem $y = a + x$
 $+ ax - xx + aax + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}aa^3$ &c.
Qua inventa possis pro a
substituere 1, 2, 0, $\frac{1}{2}$ aut quem-
vis Numerum, et sic relati-
onem inter x & y modis in-
finitis obtinere.

Et nota quod ubi quantitas elicienda afficitur facta dimensione (ut in
precedentium Exemplorum quarto vides) convenit plerumq; unitatem vel aliam
quemvis aptum numerum pro primo ejus termino adhibere; immo hoc
necesse

neceſſe eſt ubi radix (ad factor illius dimensionis valorem obtinendum) propter negativum ſignum nequit alius extrahi ut et ubi nulli ſunt termini in prima ſive capitali claſſe reſpondendi; ex quibus initialis ille terminus eliciantur.

Sic tandem hoc moleſtiſſimum et omnium difficiliſſimum Problema ubi duæ tantum fluentes quantitates una cum earum fluxionibus in Aequatione comprehenduntur abſolvi: ſed præter generalem methodum qua omnes difficultates complexus ſum ſunt alia plerumq; contractiones quibus opus aliquando ſublevare poſſit, et quantum aliqua Specimina ex abundanti perſtringere fate non erit ingratum.

1. Si quando itaq; quantitas elicienda ſit alicubi negata dimensionis non eſt abſolute neceſſarium ut Aequatio propterea ad aliam formam educatur. Sic enim expoſita Aequatione $y = \frac{1}{y} - xx$ ubi y eſt unius negata dimensionis, poſſim equidem ad aliam formam reducere, veluti, ſcribendo $1 + y$ pro y , ſed expeditior erit

	*	*	$-xx$
$\frac{1}{y}$	$1 - x + \frac{3}{2}xx$		Uc.
Summa	$1 - x + \frac{3}{2}xx$		
$y = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$			Uc.
$\frac{1}{y} = 1 - x + \frac{3}{2}x^2$			Uc.

reſolutio quam in annexo Diagrammate designatam habes, ubi aſſumpto 1 pro initio valoris y cæteros ejus terminos ut in precedentibus extraho, et interea valorem $\frac{1}{y}$ exinde per Divisionem paulatim inſtitutam elicio

et inſero in valorem marginalis termini.

2. Neg ſemper opus eſt ut alterius fluentis quantitatibus Dimensiones ſint poſſim affirmativæ. Nam ex Aequatione $y = 3 + 2y - \frac{7y}{x}$, abſq; termini $\frac{7y}{x}$ reductione præſcripta emerget $y = 3x - \frac{3}{2}xx - 4x^3$ &c.

Uter $y = -y + \frac{1}{x} - \frac{xx}{x}$ (opere ad modum annexi Speciminis juſtito) emerget $y = \frac{1}{x}$

	$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x}$
$-y$	$* - \frac{1}{x}$
Summa	$-\frac{1}{x} 0$
$y = \frac{1}{x}$	

Ubi obiter nota quod inter modos infinitos quibus qualibet Aequatio reſolvi poteſt ſæpe numero contingit aliquos eſſe qui ad finitum valorem quantitatibus elicienda ſicut in allato Specimine finiuntur, et quos haud difficile eſt invenire ſi pro primo valoris termino Symbolum aliquod aſſumatur. Et reſolutione peracta conſulatur de Symbola illius quantitate qua valor elicitus evadat finitus.

3. Porro si valor y ex Aequatione $y = \frac{y}{2x} + 1 - 2x + \frac{1}{2}xx$ eliciendus sit, id sine aliqua reductione termini $\frac{y}{2x}$ non incommode fiat fingendo (pro more Analytico) datum esse quod quaeritur. Ut propterea pro primo termino valoris ejus effingo $2ex$ assumendo $2e$ pro numerabili

	$1 - 2x + \frac{1}{2}xx$
$\frac{y}{2x}$	$e + fx + gxx + hxx^3$
Summa	$+ 1 - 2x + \frac{1}{2}xx + hxx^3$ $+ e + fx + gxx$
Hypothetici $y =$	$2ex + 2fx^2 + 2gx^3 + 2hx^4$
Consequenter $y =$	$+ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}hx^4$ $+ ex + \frac{1}{2}fx + \frac{1}{3}gx^3$
Revera $y =$	$2x - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3$

coefficiente, quae nondum innotescit. Et hunc $2ex$ pro y in termino marginale $\frac{y}{2x}$ substituens prodit (e) quem scribo ad dextrum et Summa $1 + e$ dabit $x + ex$ pro eodem primo termino valoris y quem prius designaveram termino $2ex$. Pono itaque

$2ex = x + ex$ et inde elicio $e = 1$. Adeoque valoris y primus terminus ($2ex$) est $2x$. Ad eundem modum pro secundo termino designando effichimus $2fx^2$ usus pro et inde tandem eruo $-\frac{2}{3}$ pro valore f , adeoque $-\frac{4}{3}xx$ pro secundo termino. Et sic effichitur g in tertio termino valebit 0 , et h in quarto valebit 0 , et proinde cum nullis praeterea terminos supersuper video, concludo opus finitum esse, et y valore $2x - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ praecise.

Ad eundem fere modum si esset $y = \frac{3y}{4x}$, effingeret $y = ex^2$, ubi (e) ignotum coefficientem et numerum dimensionum similiter ignotum denotet. Et ex^2 pro y substituto, prodibit $y = \frac{3ex^2}{4}$, et inde rursus $y = \frac{3ex^2}{4}$. Conferantur jam valores y , et videbitur esse $\frac{3e}{4} = e$, adeoque $e = \frac{4}{3}$ et e indefinitum. Quare assumpto utcumque e , erit $y = ex^2$.

4. Ad haec nonnunquam opus ab altissima dimensione aequabilis quantitatis inchoari potest et ad depressiores continuo pergere, veluti si datur $y = \frac{y}{xx} + \frac{1}{xx} + 3 + 2x - \frac{4}{x}$, et ab altissimo termino

	$+ 2x + 3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{xx}$
$+\frac{y}{xx}$	$* + 1 + \frac{4}{x} * - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^4} 4e$
Summa	$+ 2x + 4 * + \frac{1}{xx} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^4}$
$y =$	$xx + 4x * - \frac{1}{x} + \frac{1}{2xx} - \frac{1}{6x^3} 4e$

$2x$ opus inchoetur disponendo capitalem Seriem in ordine praecedentibus contrario, emerget tandem $y = xx + 4x - \frac{1}{x} 4e$ prout in appropiata operandi forma

videre est. Et hic in transitu notari potest quod inter operandum potuit inter terminos $4x$ et $-\frac{1}{x}$ pro intermedio deficienti termino quolibet data quantitas inseri, et sic valor y modis infinitis ex trahi.

5. Si quæ præterea sint fractæ dimensionum Relatæ Quantitatis indices, ad integros reduci possunt fingendo quantitatem illam sua fracta dimensionis affectam esse alij cuilibet tertio. Fluenti quantitati æqualem, et substituendo tum illam quantitatem tum Fluxionem ejus ab illa ficta Equatione oriundam pro Relatæ Quantitate et ejus Fluxione.

Quemadmodum si exponitur Equatio $y = 3xy^{\frac{2}{3}} + y$, ubi Relatæ Quantitas fractæ dimensionis indices $\frac{2}{3}$ afficitur, assumpta ad arbitrium fluenti quantitate z finge esse $y^{\frac{2}{3}} = z$, sive $y = z^3$, et Fluxionum relatio juxta Prob. 1. erit $y = 3z^2z$. Quare substituto $3z^2z$ pro y ut et z^3 pro y ac $2z$ pro $y^{\frac{2}{3}}$ emerget $3z^2z = 3xz^2 + z^3$, sive $z = x + \frac{1}{3}z$. Ubi z supplet vices Relatæ Quantitatis. Postquam vero valor z , eo nomine euiter utpote $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{216}x^4 + \frac{1}{3240}x^5$ &c. pro z restitue $y^{\frac{2}{3}}$ et habebis desideratam relationem inter x & y , nempe $y^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{216}x^4$ &c. Et Cubis partium utrobique positis erit $y = \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{24}x^7 + \frac{1}{288}x^8$ &c.

Pari ratione si datur $y = \sqrt{xy} + \sqrt{xy}$, sive $= 2y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ $02 = y^{\frac{1}{2}}$
sive $2a = y$, et inde per Prob. 1. elicio $2xz = y$, et consequenter $2xz = 2z + x^{\frac{1}{2}}z$, sive $z = 1 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Adeoque per casum præiorem hujus est $z(y^{\frac{1}{2}}) = x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$, et partibus Quadratis $y = xx + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{9}x^3$. Sin valorem y modis infinitis desideras, fac $z = c + x + \frac{1}{3}x^2$ assumpto utcumque initiali termino c , et erit $y(x) = c^2 + 2cx + \frac{2}{3}cx^2 + x^2 + \frac{2}{3}cx^3 + \frac{1}{9}x^3$.

Ast hæc nimis officiosi tractare videor siquidem rarissimè usui esse possunt.

Solutionis Cas. 3.

Problematis ubi tres vel plures quantitatum fluxiones Equatio complectitur Resolutio brevi absoluitur. Scilicet inter duas quaslibet istorum quantitatum relatio (ubi ex statu Equationis non determinatur) qualibet effingi debet, et earum fluxionum eandem queri, eo ut alterutra una cum ejus fluxione ex Equatione exposita determinari possit. Quia de causâ si trium insunt quantitatum fluxiones unica effingenda est Equatio ac duæ si insunt quatuor, et sic porro, ut exposita Equatio in aliam tandem Equationem transformetur cui non insint plures duabus. Et hæc deinde ut supra resolutæ reliquarum quantitatum relationes eruentur.

Sic Equatio $2xz - z + yx = 0$, exposita; quo quantitatum x, y et z quarum fluxiones \dot{x}, \dot{y} et \dot{z} Equatio complectitur relationes inter se obtineam, relationem inter duas quaslibet ut x & y pro lubitis effingo, puta quod sit $x = y$, vel $2y = x + z$, vel $x = yy$ &c. Sit autem $x = yy$, et inde erit $\dot{x} = 2y\dot{y}$. Quare scriptis $2y\dot{y}$ pro \dot{x} , et yy pro x , exposita Equatio transformabitur in $4y\dot{y} - z + yyy = 0$. Et

Et inde relatio inter y & z emerget $2yz + \frac{1}{3}y^3 = z$. Ubi si x pro yz , et $x^{\frac{2}{3}}$ pro y^3 , vicissim scribatur prodibit etiam $2xz + \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}} = z$.

Addeig inter modos infinitas quibus x , y & z , ad invicem referuntur unius his Aequationibus $x = yz$, $2yz + \frac{1}{3}y^3 = z$, et $2xz + \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}} = z$, designatus investigatur.

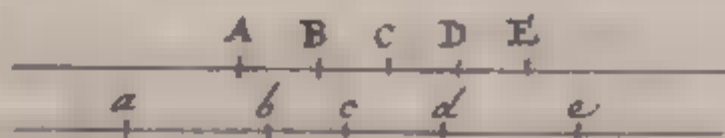
Demonstratio.

Problema tandem conficimus sed Demonstratio superest.

Et in tanta rerum copia ne per nimias ambages e proprijs fundamentis Synthetice derivetur, sufficiat per Analysin sic breviter indicare. Scilicet, Equations qualibet exposita postquam opus ad finem perduxeris experiri est quod ex elicita Equations exposita vicissim (per Prob. 1.) eruetur. Et proinde Quantitatum relatio in elicita Equations exigit relationem fluxionum in exposita, et contra: Sicut ostendendum erat. Sic Aequatio $y = x$ exposita elicitur $y = \frac{1}{3}x^2$, et inde vicissim (per Prob. 1.) $y = xx$ sive $= x$, quando quidem x supponitur esse 1. Et sic ex $y = 1 - 3x + 4x^2 + xx + xy$ provenit $y = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{42}x^6$ &c. Et inde vicissim per Prob. 1. $y = 1 - 2x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{15}x^5$ &c. Qui duo valores ipsius y conveniunt, ut patet substituendo $x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5$ &c pro y in priori.

Ceterum in Aequationum reductione adhibui operationem de qua praeterea rationem reddere oportet: Estq transmutatio fluentis quantitatis per connexionem cum Quantitate data.

Sunt AE et ae Lineae utinqz infinitae per quas mobilia duo e



longinquo trajiciantur simul attingentia locos A et a, B et b, C et c, D & d &c. Et sit B punctum ■ cuius ■ mobilis distantia in AE motus estimetur ita ut -BA, BC, BD, BE, successive sint Fluentes quantitates quando mobile sit in Locis A, C, D, E. Sitq b consimile punctum in altera Linea: Et erunt -BA ac -ba contemporaneae fluentes quantitates, ut et BC ac bc, BD ac bd, BE ac be &c. Quod si vice punctorum ■ & b substituantur A & C ad quae tanquam quiescentia motus referantur, tunc o et -ca, AB & -cb, AC & o, AD & cd, AE & ce, &c. erunt contemporaneae fluentes quantitates. Mutantur itaqz fluentes quantitates Additione & Subtractione datarum AB & bc, sed non mutantur quoad motus celeritatem et fluxionis mutuum respectum; nam ejusdem longitudinis sunt partes contemporaneae AB & ab, BC & bc, CD & cd, DE & de in utroqz casu.

Et

Et sic in Aequationibus quibus hæc quantitates designantur partes contemporaneas quantitarum non ideo mutantur quod earum absoluta longitudo datâ aliquâ augeatur vel minuatur. Unde constat Propositum: Nam Problematis huius Scopus propriè non alius est quam contemporaneas partes sive absolutarum quantitarum (v, x, y , aut z) contemporaneas differentias datâ fluendi ratione descriptas determinare. Et proinde est cuiusnam sint absolute longitudinis quantitates illæ dummodo contemporaneas sive correspondentes earum differentie cum exposita fluxionum relatione conveniant.

Potest et huius rei ratio sic Algebraicè reddi. Proponatur $xy = xxy$, et finge $x = 1 + z$ eritq; (per Prob. 1.) $y = z$. Adeoq; pro $xy = xxy$ scribi potest $z = xy + xzy$. Jam cum sit $y = z$, patet quantitates x & z esse non sint ejusdem longitudinis, pariter tamen fluere respectu ipsius y , et pares habere partes contemporaneas. Quid itaq; si iisdem Symbolis denotem quæ fluendi ratione conveniunt et ad contemporaneas differentias determinandas vice $xy = xxy$ usurpem $y = xy + xxy$

Nam deniq; quo pacto partes contemporaneas ex Aequatione Quantitates involvente invenire possint per se manifestum est.

E. g. Sit $y = \frac{1}{2} + x$ Aequatio. Et cum sit $x = 2$ erit $y = 2\frac{1}{2}$, cum vero sit $x = 3$, erit $y = 3\frac{1}{2}$, ergo dum x fluit a 2 ad 3 y fluit a $2\frac{1}{2}$ ad $3\frac{1}{2}$. Adeoq; partes in hoc tempore transactæ sunt $(3-2)$ 1, et $(3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2})\frac{1}{2}$.

Facti hiisce sequentium fundamentis ad Problemata magis particularia jam trans.

Prob. 3.

Determinare Maximas et Minimas.

Quantitas ubi Maxima est vel Minima, in illo Momento nec profluit nec refluit. Nam si profluit, id arguit minorem fuisse et statim majorem fore quam jam est; et contra si refluit. Quamobrem fluxionem ejus per Prob. 1. quare et pone nullam esse.

Exemp. 1.

Si Maxima Quantitas x in Equatione $x^3 - ax^2 + acy - y^3 = 0$ desideretur. Quantitatum x et y Fluxiones quare, et prodibit $3xx^2 - 2aax + acy - 3yy^2 + aiy = 0$. Positoq; $\dot{x} = 0$, restabit $-3yy^2 + aiy = 0$, sive $3y^2 = ax$. Cujus ope possis alterutrum x vel y in Equatione primaria exterminare, et per Equationem resultantem determinare alteram, et utramq; deinde per $3y^2 + ax = 0$.

Perinde est hæc operatio ac si multiplicares terminos propositæ Equationis per Numerum Dimensionum alterius fluentis quantitatis y . Unde prodit Auddeniana, notissima Regula quod ad obtineandam Maximam aut Minimam Relatam Quantitatem. Equatio juxta Dimensionis Correlatæ Quantitatis disponi debet et per quamlibet Arithmeticam Progressionem multiplicari. Ast cum neq; hæc Regula ad Equationis Sædis Quantitatibus affectas, neq; ulla alia hactenus quod xiam divulgata, absq; prævia reductione se extendat: Ejus rei accipe sequens Exemplum.

Exemp. 2

Si Maxima quantitas y in Equatione $x^3 - ay^2 + \frac{by^3}{a+y} - xx$ $5ay + xx = 0$ determinanda est; ipsarum x & y fluxiones quare, et emerget $3xx^2 - 2aiy - \frac{3aby^2 + 2by^3}{a^2 + 2ay + yy} - \frac{4aaxy - 6ax^3 - aiy^2}{2\sqrt{ay + xx}} = 0$. Et cum ex Hypothesi sit $\dot{y} = 0$, neglige terminos in y ductos (id quod inter operandum ad minuendum Laborem antea fieri potuit) ceterosq; per xx divide, et restabit $3x - \frac{2ay - 3xx}{\sqrt{ay + xx}} = 0$ factosq; reductione exurget $4ay + 3xx = 0$. Cujus ope possis utramvis quantitatem x vel y ex Equatione primò proposita exterminare ac deinde ex Equatione resultante (qua Cubica erit) valorem alterius elicere.

Ex

Ex hoc problemate sequentium resolutio petenda est.

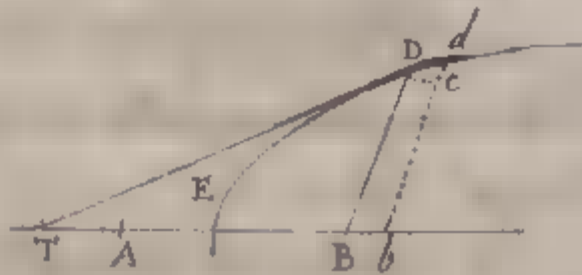
1. In dato Triangulo aut Segmento cujusvis Curvae Maximum Rectangulum inscribere.
2. Maximam vel Minimam rectarum ducere quae inter datum punctum et Curvam positione datam interjacent, sive, a dato puncto ad Curvam ducere perpendicularum.
3. Maximam vel Minimam rectarum ducere quae per datum Punctum transeunt interjacent alijs duabus sive rectis sive Curvis Lineis.
4. A puncto intra Parabolam dato rectam ducere quae Parabolam omnium obliquissimè secabit. Et idem in alijs Curvis facere.
5. Curvarum vertices Maximas aut Minimas Latitudines Puncta in quibus partes circumactae se decussant determinare.
6. Curvarum puncta invenire ubi Maxime aut Minime curvantur.
7. Invenire Minimam Angulorum in quibus rectae ad Diametros suas in data Ellipsi ordinatim applicantur.
8. Ellipsium per data quatuor puncta transeuntium vel Minimum definire, vel eam quae ad formam circularem Maxime accedit.
9. Amplitudinem Sphaericae Superficie determinare quam Lux e longinquo fluens postquam ab anteriori Hemisphaerio refracta fuit illustrat in posteriori.

Et huiusmodi alia permulta facilius excogitari possunt quam (propter computandi fastidium) resolveri.

Prob: 4.
Curvarum Tangentes ducere.

Modus 1.

Tangentes pro varijs relationibus Curvarum ad rectas varie ducuntur. Et imprimis esto BD recta in dato Angulo ad aliam rectam AB tanquam basin Ordinati et ad Curvam ED Terminata. Et moveatur hæc Ordinata per indefinitum parvum spatium ad locum bds, ita ut momento cd augetur dum AB augetur momento Bb, cui Dc æqualis est. Jam producat Dd donec cum AB in T conveniat, et hæc Tangens curvam in D vel d; Suntq; triangula d c D, DBT similia. Adeoq; $TB : BD :: Dc : cd$



Cum itaq; relatio BD ad AB in Equatione qualibet pro Curva determinanda exponitur, quædam relationem fluxionum (per prob. 1). Et cape TB ad BD in ratione Fluxionis AB ad Fluxionem BD, ac TD tanget Curvam in D.

Exemp: 1.

Nominata AB x , et BD y , esto earum relatio $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Et Fluxionum relatio erit $3xx^2 - 2axx + axy - 3yy^2 + ayx = 0$. Adeoq; $y : x :: 3xx - 2ax + ay : 3yy - ax :: BD (y) : BT$. Ergo $BT = \frac{3y^2 - axy}{3x^2 - 2ax + ay}$. Dato itaq; puncto D, et inde DB & AB, sive y & x ; dabitur longitudo BT, qua Tangens TD determinatur.

Potest autem hæc operandi Methodus sic concinnari, Equationis expositæ terminos fac esse nihilo æqualis. Per proprium numerum Dimensionum Ordinatæ quantitatis multiplicata, et exitum colloca in Numeratore; Dein terminos ejusdem Equationis per proprium Numerum Dimensionum Basis Multiplicata, et exitum per Basim divisum colloca in Denominatore, valoris BT. Et illam BT cape ac partes adversus A si valor ejus sit affirmativus, aut versus A si sit negativus.

Sic Equatio $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, per superiores Numeros Multiplicata dat $axy - 3y^3$ pro Numeratore; Et per inferiores multiplicata, ac divisa per x dat $3x^2 - 2ax + ay$ pro denominatore valoris BT.

Sic

Sic Aequatio $y^3 - by^2 - cdy + bcd + dxy = 0$ (qua designat Parabolam secundi generis cujus beneficio Des Cartes construxit Aequationes 6 Dimensionum vid. Geom. Cart. p. 42) prima fronte dat $\frac{3y^3 - 2by^2 - cdy + dxy}{dy}$ sive $\frac{3yy}{d} - \frac{2by}{d} - c + x = BT$.

Et sic $a^2 - \frac{x}{y}x^2 - y^2 = 0$ (qua designat Ellipsin cujus centrum A) dat $\frac{-2xy}{-\frac{x^2}{y}}$ sive $\frac{2xy}{rx} = BT$. Et sic in alijs.

Et nota quod nihil interest cujusnam quantitatis sit Angulus Ordinationis ABD.

Ust hac Regula se ad Aequationes Superius quantitatibus affectas, Curvasq; Mechanicas non extendit. In istis casibus ad fundamentalem Methodum recommendum est.

Exempl: 2.

Esto $x^3 - ay^2 + \frac{by^3}{a+y} - xx\sqrt{ay+xx} = 0$. Aequatio designati relationem inter AB & BD et per prob. 1. relatio fluxionum erit $3xxx - 2aiyy + \frac{sabyyy + 2byy^3 - 4aixxy - 6ixx^3 - aiyx^2}{aa + 2ay + yy} - \frac{2\sqrt{ay+xx}}{2\sqrt{ay+xx}} = 0$. Atque adeo est $\frac{3xxx - 4aixxy - 6ixx^3}{2\sqrt{ay+xx}} : 2aiy + \frac{sabyyy + 2byy^3 - axxx}{aa + 2ay + yy} :: y : x :: BD : BT$.

Exempl: 3.

Est ED Conchoides Nichomedeae, Polo G, Asymptoto AT et intervallo LD descripta.

Sit GA = b, LD = c, AB = x, & BD = y

Et propter similia Triangula DBL & DMG erit LB:BD::DM:MG

$$\sqrt{cc-yy} : y :: x : b+y.$$

$$\text{Adcoq } b+y \times \sqrt{cc-yy} = yx.$$

Nactus hanc Aequationem fingo

$$\sqrt{cc-yy} = z. \text{ Et sic duas Aequationes, } bz + yz = yx \text{ et } zz = cc - yy$$

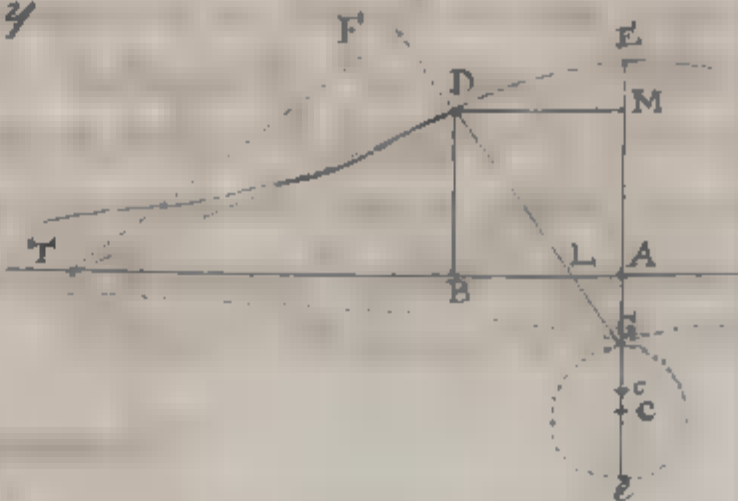
habeo. Quarum ope Fluxiones Quantitatum x, y & z (per prob. 1.) quaro, et e prima prodit $bz + yz + yz = yx + xy$, ac e secunda

$2yz = -2xy$ sive $yz + xy = 0$. Equibus exterminato z oritur

$$-\frac{byy}{z} - \frac{yyy}{z} + yz = yx + xy.$$

Qua resoluta fit $y : z - \frac{by}{z} - \frac{yy}{z} - x :: y : x :: BD : BT$. Cum ergo BD sit y, erit $BT = z - x - \frac{by-yy}{z}$. Hoc est $BT = AL + \frac{BD \times GM}{BL}$. Ubi signum - ipsi BT praefixum denotat punctum T ad partes adversum A capiendum esse.

Scholium.



Scholium.

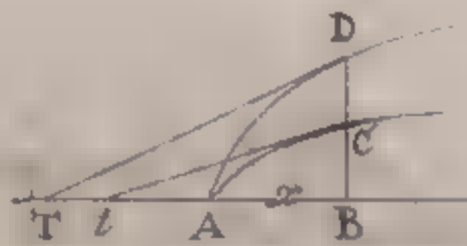
Et hinc obiter inventio puncti determinantis concavam et convexam partem Conchoidis prodit. Nempe cum AT sit omnium Minima, erit D ejusmodi punctum. Esto itaq. $AT = v$, et cum sit $BT = -z + x + \frac{by + yy}{z}$ erit $v = -z + 2x + \frac{by + yy}{z}$. Ubi (ad opus abbreviandum pro x substitue $\frac{bz + y^2}{y}$ valorem e superioribus erutem, et fiet $\frac{2bz}{y} + z + \frac{by + yy}{z} = v$. Unde per Prob. 1. Fluxionibus v, y, z quæsitæ et per Prob. 3. suppositæ $v = 0$, emerget $\frac{2bz}{y} - \frac{2byz}{y^2} + z + \frac{by + yy}{z} - \frac{bzy - zyy}{z^2} = (v = 0)$. In hac deniq. substitue $-\frac{yy}{z}$ pro z , et $cc - yy$ pro zz (valores z et zz e superioribus petendos) et facta reductione obtinebitur $y^3 + 3by^2 - 2bc^2 = 0$. Cujus Equationis constructione dabitur y sive AM; Et per M acta MD ipsi AB parallela incidet in punctum Flexus contrarij D.

Præterea si Curva Mechanica est cujus Tangentem ducere oportet quantitatum Fluxiones, ut in Exemplo 5. Prob. 1. quærundæ sunt, ceteraq. ut in precedentibus peragenda.

Exempl. 4.

Sunto AC et AD duæ Curvæ quibus recta BCD ad Basem AB in dato Angulo applicata occurrat in C & D. Et appellatur $AB = x$, $BD = y$ & $\frac{\text{Area ACB}}{1} = z$ et per Prob. 1. præparat. ad læm. 5. erit $z = x \times BC$.

Tam sit AC Circulus aut Curva quavis nota et alteram Curvam AD definiendam capto. natur quavis. Equatio cui z intacta est, - veluti $zz + aax = y^4$. Et per Prob. 1. erit $2xz + aax + aax = 4yy^3$. Et scripto $x \times BC$ pro z fiet $2xz \times BC + aax \times BC + aax = 4yy^3$. Adeoq. $2x \times BC + aax + ax : 4y^3 :: y : x :: BD : BT$. Quamobrem si natura Curvæ AC detur, Ordinata BC et Area ACB sive z , dabitur punctum T, per quod Tangens DT transibit.



Exempl. 5.

Sit $AB = x$, $BD = y$, ut ante, et Curvæ cujusvis AC Longitudo sit z ; ductaq. ad eam Tangente Ct, erit $Bt : Ct :: x : z$ sive $z = \frac{x \times Ct}{Bt}$.

Tam ad aliam Curvam AD cujus Tangens ducenda est, detur quælibet Equatio in qua z involvitur, puta si $z = y$, erit $z = y$. Adeoq. $Ct : Bt :: y : x :: BD : BT$. Invento autem T age DT Tangentem.

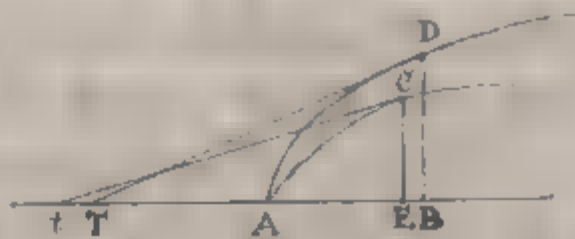
Sic posito $xx = yy$ erit $2xz + 2ax = 2yy$, et pro z scripto $\frac{x \times Ct}{Bt}$, - emerget $2xz + \frac{2ax \times Ct}{Bt} = 2yy$. Quare est $z + \frac{x \times Ct}{Bt} : 2y :: BD : DT$.

Exempl.

Exempl. 6.

Sit AC Circulus aut alia quavis nota Curva, quam tangat Ct, et sit AD alia Curva cujus Tangentem DT ducere oportet, et quae definitur assumendo AB = Arcui AC, et (CE, ac BD in dato Angulo ad AB Ordinatis) referendo BD ad CE, vel AE in Equatione aliqua.

Dic ergo AB vel AC = x , BD = y , AE = z , & CE = v et patet v, x & z Fluxiones ipsarum CE, AC & AE esse inter se ut sunt CE, Ct, & Et. Adeoque $x \times \frac{CE}{Ct} = v$ & $x \times \frac{Et}{Ct} = z$.



Detur jam quaelibet Equation ad definiendam Curvam AD, veluti $y = z$ et erit $y = z$; Adeoque Et : Ct ($:: y : x$) :: BD : BT.

Vel detur $y = z + v - x$, et erit $y = (v + z - x) \frac{x \times CE + Et - Ct}{Ct}$ Adeoque CE + Et - Ct : Ct ($:: y : x$) :: BD : BT.

Vel denique detur $ayy = v^2$, et erit $2ayy (= 3vv^2) = 3xv^2 \times \frac{CE}{Ct}$. Adeoque $3vv \times CE : 2ay \times Ct :: BD : BT$.

Exempl. 7.

Sit FC Circulus quem tangat CS sitq; FD Curva quae definitur assumendo quamvis relationem Applicatae DB ad FC. Accum quem DA ad Centrum ducta intercipit. Et demissa CE in Circulo applicata; dic AC vel AF = 1, AB = x , BD = y ,

AE = z , CE = v , CF = t ; Et erit $t \times \frac{CE}{CS} = v$, & $t \times \frac{ES}{CS} = z$. Ubi pono z negativè quod AE diminuitur dum EC augetur. Et insuper AE : EC :: AB : BD. Adeoque $zy = vx$ et inde per prob. 1. $xy + yz = vx + xv$. Et hoc, exterminatis v, z & v , faciunt $yx - ty^2 - t^2 = xy$.



Definiatur jam Curva DF. Equatione quavis a qua valor t hic substituentur deduci possit: puta sit $t = y$ (Equatio ad primam Quadraticam) et per prob. 1. erit $t = y$. Adeoque $yx - yy^2 - yx^2 = xy$ unde $y : xx + yy - x :: y : -x :: BD : BT$. Quare $BT = x^2 + y^2 - x$. Et $AT = xx + yy = \frac{AD^2}{AF}$.

Ad eundem modum si sit $tt = by$, proveniet $2tt = by$. Et inde $AT = \frac{b}{2t} \times \frac{AD^2}{AF}$. Est sic in alijs.

Exempl.

Exempl. 1.

Die $GD = x$ & $BD = y$, & esto earum relatio $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$.
 Eritq; Fluxionum ratio $3x^2 - 2ax + ay : 3y^2 - ax :: \dot{x} : \dot{y}$. Atq; adeo $3x^2 - 2ax + ay : 3y^2 - ax :: DB(y) : DF$. Esto ergo $DF = \frac{3y^2 - axy}{3x^2 - 2ax + ay}$.
 Adeoq; dato quolibet in Curva puncto D, et inde BD & GD sive y & x , dabitur punctum F: Unde si normalem FT erigui, ad ejus concursum cum Basi AB ducta DT Curvam tanget.

Et hinc patet Regulam perinde ac in priori casu concinnari posse. Scilicet Aequationis exposita terminos omnes ad eandem partes dis-
 pone, et dimensiones Ordinatae y multiplica, et eorum colloca in Numeratore. Dein terminos ejus sigillatim per Dimensiones subtensoe x multiplica, et eorum per subtensoam illam x divisum colloca in Denominatore valoris DF. Namq; DF cape ad partes contra & si sit affirmativa, sin occurrat, cape ad eandem partes. Et nota quod nihil intersit quanto intervallo punctum G distat a Basi AB, si forte distat neg quiaam sit Angulus Ordinationis ABD.

Sic Aequatio superior $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, prima fronte dat $axy - 3y^3$ pro Numeratore, et $3x^2 - 2ax + ay$ pro Denominatore valoris DF.

Sic etiam $a + \frac{b}{a}x - y = 0$ (qua Aequatio est ad Conicam Sectionem) dat $-y$ pro Numeratore, et $\frac{b}{a}$ pro Denominatore valoris DF quae ideo erit $= -\frac{ay}{b}$.

Et sic in Conchoide (ubi res capessit obsoletur quam ante) posito $GA = b$, $LD = c$, $GD = x$, et $BD = y$ (vid. fig. lxx. 3. Mod. 1.) erit $BD : DL :: GA : GL$.
 $y : c :: b : x - c$
 Adeoq; $xy - cy = cb$, sive $xy - cy - cb = 0$. Quae Aequatio juxta Regulam dat $\frac{xy - cy}{y}$ hoc est $x - c = DF$. Prode ergo GD ad F ut sit $DF = LG$ et ad F erige normalem FT occurrentem Asymptoto AB in T, et acta DT Conchoidem Tanget.

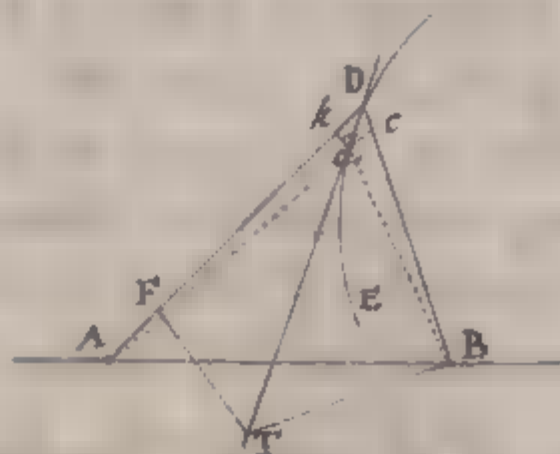
Siquando compositae quantitates in Aequatione reperiuntur ad Methodum generalem recurrendum est, nisi ubi malueris Aequationem reducere.

Exempl. 2.

Si detur Aequatio $b + x \times \sqrt{cc - yy} = yx$ pro relatione inter GD et BD (Fig. praeced.) determinanda, fluxionum relationem juxta Prob. 1. quære. Utprote ficto $\sqrt{cc - yy} = z$, Aequationes $bz + yz = yx$, et $cc - yy = zz$ habebis, et inde fluxionum \dot{x} , \dot{y} & \dot{z} relationes $b\dot{z} + y\dot{z} + y\dot{z} = y\dot{x} + y\dot{x}$, et $-2y\dot{y} = 2z\dot{z}$. Et exterminatis \dot{z} & \dot{z} orietur $y\sqrt{cc - yy} - byy - yy^2 - yx = x\dot{y}$. Est ergo $y : \sqrt{cc - yy} - by - yy - x :: \dot{y} : \dot{x}$:: BD (y) : DF.

Modus 3.

Præterea si Curvas ad duas sub-
tensas AD & BD referatur quæ a datis
punctis A ac B ductæ ad Curvam con-
veniant: Concipe punctum illud D per
infinite parvum spatium Dd in Curva
profluere, Et in AD & BD cape $Ak = Ad$
et $Bc = Bd$. Et erunt kD & cD contem-
poranea momenta Linearum AD



& BD. Cape jam DF ad BD in ratione momenti Dk ad momentum
Dc (i.e. in ratione Fluxionis lineæ AD ad Fluxionem lineæ BD) et
erige perpendiculara BT, FT concurrentia in T; eruntq; Trapezia DF'TB
ac Dkdc similia, et proinde Diagonales DT Curvam tangent.

Per Equationem itaq; quæ relatio inter AD & BD definitur quæ
relationem Fluxionum ope prob. 1. et cape FD ad BD in eadem ratione.

Exempl.

Posito $AD = x$ & $BD = y$, sit earum relatio $a + \frac{ex}{d} - y = 0$ (quæ Equatio
est ad Ellipses secundi generis quarum proprietatis ad Locum refini-
gendam Des-Cartes in Lib. 2. Geometria docuit)

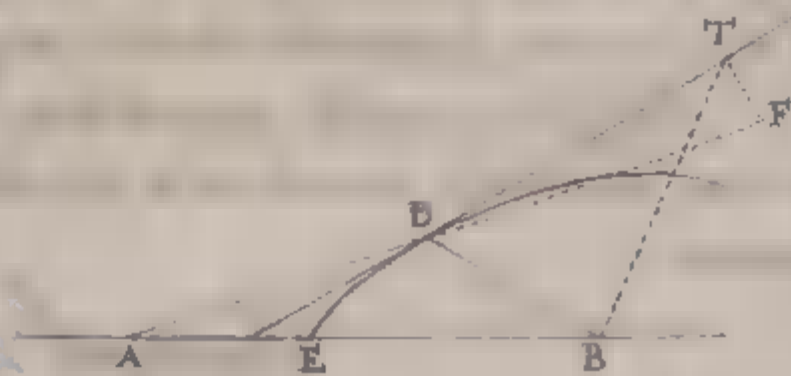
Et Fluxionum relatio erit $\frac{ex}{d} - y = 0$. Et itaq; $e : d :: y : x :: BD : DF$.

Et pari ratione si $a - \frac{ex}{d} - y = 0$, erit $e : -d :: BD : DF$. In priori
casu, cape DF versus A, et ad contrarias partes in posteriori.

Corol. 1.

Nunc si $d = e$ (quo casu Curva
evadit Conica sectio) erit $DF = DB$.

Et inde Triangula DF'T, DBT
æqualia. Angulusq; FDB a
Tangenti bisecabitur.



Coroll. 2.

Nunc etiam quæ Des-Cartes de his Curvis circa Refractiones hæud absq; circuitu
demonstravit, per se manifesta sunt: Siquidem DF ac DB (quæ sunt in data ratione
 d ad e) respectu Sinus totæ DT sint Sinus Angulorum DTF, ac DTB, id est. Incidentiæ
adq; AD in superficiem Curvæ et Reflectionis vel Refractionis ejus DB. Exq;
per ratio de Refractionibus Conicarum Sectionum si modo punctorum A vel B
alterutrum infinite distare concipiatur.

Perfacile est hæc Regulam pro more præcedentium concinnare et pluribus
exemplis donare. Quinimo ubi Curvæ alijs quibuscunq; modis ad rectas referun-
tur et ad præcedentes formas hæud commode reduci possunt, perfacile est alias Re-
gulas ad hæc exemplar pro re nata excogitare.

Modus 4.

Modus 4.

Quemadmodum si recta BD circa datum punctum B volventis punctum D sit ad Curvam aliquam, et C, sit intersectio ejus cum recta AC, positione data; habeaturq; relatio inter BC & BD quacumq; Aequatione designata; Age BF parallelam AC, eiq; occurrat DF normalis ad BF. Et ad DF itidem origo normalis FT, et cape in ratione ad BC quam habet Fluxio ipsius BD ad Fluxionem ipsius BC: Actaq; DT Curvam tanget.



Modus 5.

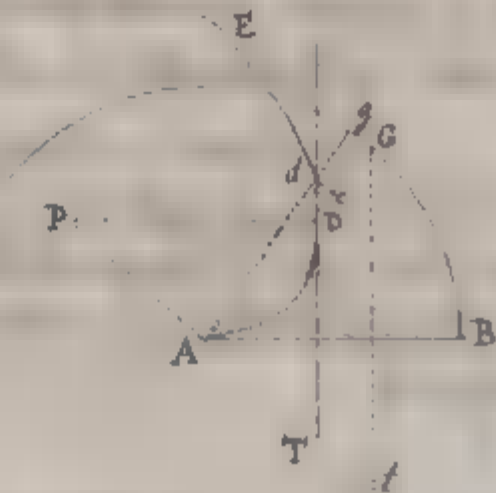
Si in dato puncto A, Aequatio relationem inter AC et BD designat, duc CG parallelam DF, et cape FT in ratione ad BG quam habet Fluxio BD ad Fluxionem AC.

Modus 6.

Vel deniq; si Aequatio relationem inter AC & CD definit, conveniant AC & FT in H, et cape HT in ratione ad BG quam habet Fluxio CD ad Fluxionem AC. Et sic in alijs.

Modus 7. De Spiralibus.

Haec secus absolvetur Problema ubi Curva non ad rectas sed ad alias Curvas lineas (uti solent Mechanice) referatur. Sit BG Circuli peripheria in cujus Semidiametro AG dum circa centrum A convolvitur, moveatur utcumq; punctum D, et Spiralem ADE describat. Et concipe Dd et partem Curvae infinitè parvam per quam D fluit, et in AD cape AC = Ad, et erunt c Dac Gg contemporanea momenta rectae AD et peripheriae BG. Duc ergo At ||^m cD, i. e. ||^m AD, et cum ea Tangens DT conveniat in T. Erity; cD:cd::AD:AT, sit insuper Gt parallela Tangenti, et erit cd:Gg::Ad vel AD:AG::AT:At.



Quare exposita quacumq; Aequatione quâ relatio BG ad AD definitur, quare relationem fluxionum per prob. 1. et cape At in illa ratione ad AD. Erity; Gt Tangenti parallela.

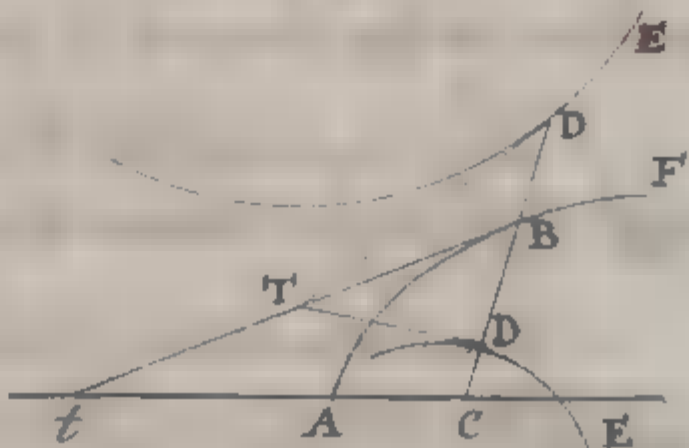
Exempl. 1.

Dichis BG = x, & AD = y, sit earum relatio $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Et opus Prob. 1. emerget $3x^2 - 2ax + ay : 3xy - ax :: y : x :: AD : At :: AP : AG$. Puncto t sic invento duc Gt eiq; parallelam DT, et illam Curvam tanget.

(Exempl.)

Modus 9.

Si deniqz ABF sit Curva quavis data quam Tangat recta Bt, et recta BC in dato Angulo ad Basin AC applicata pars BD inter hanc et aliam Curvam DE intercepta relationem ad Curvæ portionem AB in Aequatione quacunque definitam habeat: alterius Curvæ Tangentem BT ducere capiendō in huius Tangente BT in ea relatione ad BD, quam habet Fluctio Curvæ AB ad Fluxionem rectæ BD.



Exempl. 1.

Dictis $AB = x$, et $BD = y$, esto $ax = yy$, et per prob. 1. erit $ax = 2yy$ adeoque $a : 2y :: y : x :: BD : BT$.

Exempl. 2.

Sit $\frac{a}{8}x = y$ (Aequatio ad Trochoidem si modo ABF sit Circulus) et erit $\frac{a}{8}x = y$ Adeoque $a : 8 :: BD : BT$.

Et nihilo difficilius Tangentes, ubi ipsius BD ad AC vel ad BC relatio in Aequatione quavis exprimitur vel ubi Curva alijs quibuscunque modis ad rectas aliasve Curvas referuntur, possis ducere.

Sunt etiam alia non pauca Problemata quorum Solutiones ex hinc fluent. Cujusmodi sunt.

1. Invenire punctum Curvæ ubi Tangens est ad Basin (vel quamvis positione datam rectam) parallela vel Perpendicularis vel in alio quovis Angulo inclinata.

2. Invenire punctum ubi Tangens Maximè Minimève ad Basin, aut aliam positione datam rectam inclinatur: Hoc est invenire confinium Flexus Contrarij. Hujus autem Specimen in Trochoidè jam ante exhibui.

3. A dato quovis extra Curvæ perimetro puncto rectam ducere quæ cum perimetro aut Angulum contactus aut rectum Angulum, aut alium quemvis datum conficiet: Hoc est, Tangentes vel Perpendicularæ vel aliter ad Curvam inclinatæ rectæ a dato quovis puncto ducere.

4. A dato quovis intra parabolam puncto rectam ducere quæ Maximum Minimumve quem potest Angulum cum perimetro ejus conficiet. Et idem de alijs Curvis intellige.

5 Rectam

5. Rectam ducere quae duas positione datas Curvas, vel eandem Curvam (si potest) in duobus punctis tanget.

6. Curvam quamvis sub datis conditionibus ducere quae aliam positione datam Curvam in dato puncto tanget.

7. Luce in quamlibet Curvam Superficiem incidente cujusvis Radij Refractionem determinare.

Horum et similium Problematum confectiones ubi non obstat computandi tedium, non sunt ita difficiles ut ipsi explicandis immorari opus sit. Et Geometris, credo, magis gratum erit sic tantum recensuisse.

Prob. 5.

Curva alicujus ad datum punctum Curvaturam invenire.

Problema cum primis elegans videtur et ad Curvarum Scientiam utili. In ejus autem constructionem generalia quaedam praemittere convenit.

1. Eiusdem Circuli eadem estq; undiq; Curvatura et inaequalium Circulorum reciproce proportionales Diametris: Si alicujus Diameter Diametro alterius duplo minor est, ejus Peripheria Curvatura erit duplo major; si Diameter triplo minor est Curvatura erit triplo major, &c.

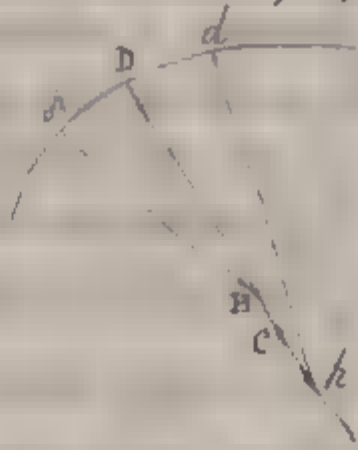
2. Si Circulus Curvam aliquam ad partem concavam in dato puncto tangat sitq; talis magnitudinis et alius contingens Circulus in Angulis contactus proximè punctum istud intercedit nequeat, Circulus ille ejusdem est Curvaturae ac Curva in isto puncto contactus. Nam Circulus qui inter Curvam et alium Circulum juxta punctum contactus interjacet, minus deflectit a Curva ejusq; Curvaturam magis appropinquat quam illi alius Circulus. Et proinde curvaturam ejus maximè appropinquat inter quem et Curvam non alius quinquam potest intercedere.

3. Itaq; Centrum curvaminis ad aliquod Curvae punctum est Centrum tangenti Circuli aequaliter incurvatae. Et sic radius vel semidiameter Curvaminis est pars perpendiculari ad istud Centrum terminata.

4. Et proportio Curvaminis ad diversa ejus puncta e proportionē curvaminis Circulorum aequae curvarum sive e reciproca proportione radii curvaminis innotescit.

Problema itaq; ad hunc locum redijt ut Radius vel Centrum Curvaminis inveniat.

Concipie ergo quod ad tria Curvae puncta δ D ac d ducantur perpendiculara quarum quae sunt ad D & δ convergiant in H ; et quae ad D & d convergiant in h . Et puncto D existente medio si major est curvitas a parte $D\delta$ quam Dd , erit $DH > dh$. Sed quo perpendiculara δH ac dh propiora sunt intermedio perpendiculari, eo minus distabunt puncta H & h . Et convenientibus tandem perpendicularis coalescant. Coalescant autem in puncto C et erit illud C centrum curvaminis ad Curvae punctum D cui perpendiculara insistent. Id quod per se manifestum est.



Hujus autem C varia sunt Symptomata quae ad ejus determinationem inservire possunt: Quorum modum

1. Quod sit concursus perpendicularorum hinc et inde a DC infinite parvam distantiam.

2. Quod perpendicularorum finite parvam distantiam intersectiones hinc et inde determinat. Ita ut quae sunt a parte curviori $D\delta$ citius ad H convergiant, et quae sunt ex altera minus Curva parte Dd citius convergiant ad h .

3. Si

3. Si DC dum Curva perpendiculariter insistat moveri concepiantur illud ejus punctum C (si idem motum accedendi vel recedendi a puncto insistente C) minimè movebitur sed Centri motionis rationem habebit.

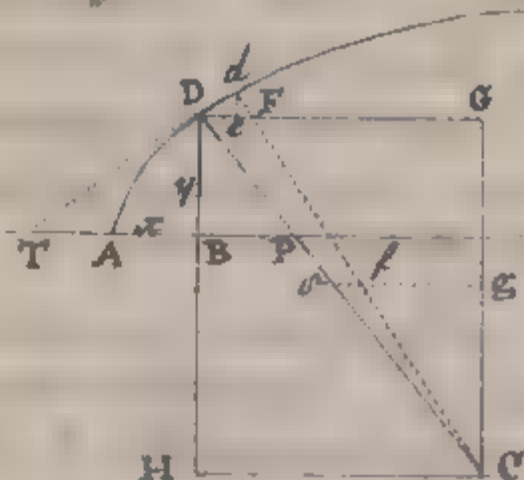
4. Si Centro C intervallo DC Circulus describatur non potest alius describi Circulus qui juxta contactum interjacebit.

5. Deniq. si alterius alicujus Tangentis Circuli Centrum ut H vel h paulatim ad hujus Centrum C accedat donec tandem conveniat, tunc aliquod e punctis in quibus Circulus ille Curvam secavit simul conveniat punctum contactus D.

Et unumquodq. horum Symptomatum ansam præbet diverimodè resolvendi problema. Nos autem primum tanquam simplicissimum eligemus.

Ad quodlibet Curvæ punctum D, esto DT tangens, DC perpendicularum et C Centrum curvæ ut ante.

Sitq. AB Basis ad quam DB in angulo recto applicatur, et cui DC occurrat in P. Age DG parallelam AB, Et CG perpendicularum in eo cape CG cujuslibet datae magnitudinis et age g perpendicularum quod occurrat DC in s. Erig. CG:gs::(TB:BD::) Fluxio Basis: Fluxionem Applicata. Concepe præterea punctum D per infinitè parvum intervallum Dd in Curvam



promoveri, et actis de ad DG et Cd ad Curvam normalibus quarum Cd occurrat DG in F et dg in f; erit De momentum Basis de momentum Applicata. S. f contemporaneum momentum rectæ gs. Sitq. $DF = De + \frac{de \times de}{De}$. Habitis itaq. horum momentorum sive quod perinde est Fluxionum generationum rationibus, habebitur ratio GC ad datam gC (quippe quæ est DF ad sf) et inde punctum C determinabitur.

Sit ergo $AB = x$, $BD = y$, $CG = 1$, Et $gs = z$, et erit $1:z::x:y$ seu $z = \frac{y}{x}$, hujus autem z momentum sf dic $z \times 0$ (factum nempe ex velocitate et infinitè parva quantitate) Erig. momentum $De = x \times 0$, $de = y \times 0$, et inde $DF = x \times 0 + \frac{y \times 0}{x}$. Sit ergo $CG(1):CG::(sf:DF::) z \times 0 : x \times 0 + \frac{y \times 0}{x}$. Adeoque $CG = \frac{x \times x + y \times y}{x \times z}$

Cum insuper Basis fluxioni x (ad quam tanquam uniformem fluxionem ceteras referre convenit) liberum sit quacumq. velocitatem tribuere, dic s. f. 1, Et erit $y = z$ & $CG = \frac{1+z^2}{z}$. Et inde $DG = \frac{z+z^3}{z}$ ac $DC = \frac{1+z^2 \sqrt{1+z^2}}{z}$

Exposita itaq. quavis Aequatione quâ relatio BD ad AB, pro Curvâ definienda designatur, imprimis quære relationem inter x & y prob. 1. et interea substitue 1 pro x & z pro y . Dein ex Aequatione sustulente per idem prob. 1. quære relationem inter x , y & z , et interea substitue 1 pro x & z pro y ut ante. Atq. ita per priorem operationem obtinebis valorem z & per posteriorem obtinebis valorem x ; quibus habitis, produc DB ad H ver.

versus concavam partem Curvae sit $DH = \frac{1+z^2}{2}$, et age HC parallelam AB et perpendiculari DC occurrentem in C, erit C Centrum curvaturae ad Curva punctum D vel cum sit $1+z^2 = \frac{PT}{BP}$, fac $DH = \frac{PT}{2 \times BP}$, vel $DC = \frac{DP^3}{2 \times DB^3}$.

Exempl. 1.

Sic expofita $ax + bx^2 - y^2 = 0$ (Aequatione ad Hyperbolam cujus latus rectum est a, ac Transversum $\frac{a}{b}$) emerget (per Prob. 1) $a + 2bx - 2xy = 0$ (scriptis nempe 1 pro x et 2 pro y in Aequatione resultante, quae secus foret $ax + 2bx^2 - 2xy = 0$). Et hinc denique prodit $2b - 2xz - 2xy = 0$, scriptis iterum 1 pro x et 2 pro y. Per priorem est $z = \frac{a+2bx}{2y}$ et per posteriorem $z = \frac{b-2x}{y}$. Dato itaq; quovis Curvae puncto D et off consequentiam x et y, ex his dabuntur z et z quibus cognitis fac $\frac{1+z^2}{2} = GC$ vel DH, et age HC.

Quomodo si desinit sit $a = 3, b = 1$, adeoq; $3x + x^2 = y^2$. Hyperbolae conditio: Et si assumatur $x = 1$, erit $y = 2, z = \frac{5}{4}, z = -\frac{3}{2}$, et $DH = -9\frac{1}{4}$. Invento H, erige HC occurrentem perpendiculari DC prius ducto, vel quod perinde ut fac HD:HC ($1:2$):: $1:\frac{5}{4}$, et age DC Curvaminis Radius.

Siquando computationum non admodum perplexam fore conser, posui indefinitos valores ipsorum z et z in $\frac{1+z^2}{2}$ valore CG substituere. Et sic in hoc exemplo per debitam reductionem obtinebis $DH = y + \frac{4y^3 + 4by^3}{a^2}$. Cuius tamen DH valor per calculum negativus prodit sicut in Exemplo numerali videre est. At hoc tantum arguit DH at partes versus B capiendum esse. Nam si fuisset affirmativus ad contrarias partes ducisse oporteret.

Corol:

Hinc Signum Symbolo + b praefixum mutatur, ut fiat $ax - bx^2 - y^2 = 0$ (Aequatio ad Ellipsin;) erit $DH = y + \frac{4y^3 - 4by^3}{a^2}$.

Atposito $b = 0$, ut Aequatio fiat $ax - y^2 = 0$, ad Parabolam; erit $DH = y + \frac{4y^3}{a^2}$. Indeq; $DG = \frac{1}{2} y + 2x$.

Ex hisce facili colligitur Radius Curvaturae cujusvis Conicae Sectionis valor $\frac{DP^3}{a^2}$.

Exempl. 2.

Si $x^3 = ay^2 - xy^2$ (Aequatio ad Cissoidem (Vodis) exponatur; Per Prob. 1. in primis oblinebitur $3x^2 = 2ay - 2xy - y^2$; ac deinde $6x = 2ay + 2xz - 2xy - 2xy - 2xz - 2xy$. Adeoq; $z = \frac{3ax + y}{2ay - 2xy}$, Et $z = \frac{3x - ax^2 + 2ay + xz^2}{2y - xy}$. Dato itaq; quolibet Cissoidis puncto et inde x et y, dabuntur z et z: Quibus cognitis fac $\frac{1+z^2}{2} = CG$.

Exempl. 3.

Si datur $b + y \sec - yy = xy$ Aequatio ad Conchoidem ut supra. finge $\sec - yy = v$ et emerget $bv - yv = xy$. Jam hanc prior (via $cc - yy = vv$) per Prob. 1. dat $-2yz = 2vv$ (scripto nempe 2 pro y) et posterior dat $bv + yv + 2v = y + az$. Et ex his Aequationibus rite dispositis determinantur v et z. At autem z praeterea determinetur, a novissima Aequatione eastermina Flucionem v substituendo $-\frac{y}{v}$, et emerget $-\frac{byx}{v} - \frac{yyz}{v} + 2v = y + xz$, Aequatio quae fluentes quantitates sine aliquibus earum Flucionibus (prout exigit resolutio Prob. 1) complectitur. Hinc itaq; per Prob. 1. elicies $-\frac{b^2z}{v} - \frac{byz}{v} + \frac{byzv}{vv} - \frac{2yzz}{v} - \frac{yyz}{v} + \frac{yyzv}{vv} + 2v + xv = 2z + xz$. Quae Aequatione in ordinem reducta et concinnata dabitur z. Invenitis autem z et z, fac $\frac{1+z^2}{2} = CG$.

Si penultimam Equationem $\frac{b^2}{y^2} + \frac{byv}{y^3} - \frac{2yz}{y^2} + \frac{y^2v}{y^3} + v = z - \frac{y^2}{z}$, Equationem priori simpliciorē pro determinando z .

Dedi quidem hoc Exemplum ut modus operandi in Tursis. Equationibus constaret. At Conchoidis Curvatura sic brevius invenire potuit. Equationis $b + y\sqrt{cc - yy} = xy$, positis quadratis et per yy divisio, exurgit $\frac{b^2cc}{yy} + \frac{2bce}{y} + \frac{cc}{bb} - 2by - yy = \frac{xx}{y}$. Et inde per Prob. 1. exoritur $-\frac{2b^2c^2x}{y^3} - \frac{2bc^2x}{y^2} - 2bz - 2yx = \frac{2cx}{y}$. Sive $-\frac{b^2c^2}{y^3} - \frac{bc^2}{y^2} - b - y = \frac{x}{z}$. Et hinc denuo per Prob. 1. exoritur $\frac{3b^2c^2x}{y^4} + \frac{2bc^2x}{y^3} - z = \frac{1}{z} - \frac{xx}{z^2}$. Per priorem exitum determinatur z , et per posteriorem z .

Exempl. 4.

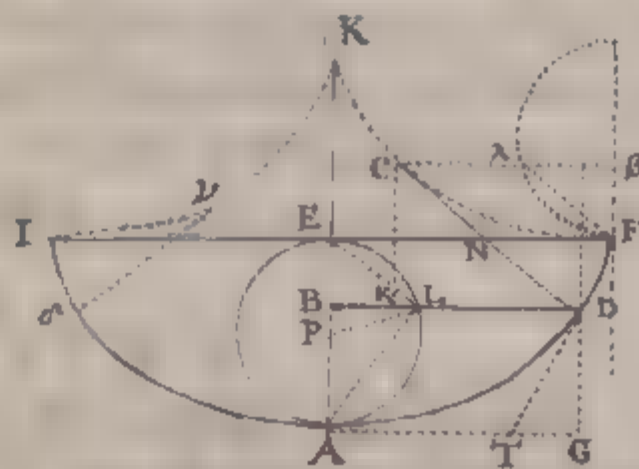
Sit ADF Trochoidis ad Circulum ALE (cujus Diameter est AE) accommodata, et Ordinata BD secante Circulum in L. dic AE = a , AB = x , BD = y , BL = v , et arc AL = t , ejusq. 3 arcus fluxionem dic t . Et imprimis (ducto PL semidiametro) erit Fluxio Basis AB ad fluxionem Arcus AL ut BL ad PL; hoc est sive $1:t::v:\frac{a}{2}$. Atq. adeo $\frac{a}{2v} = t$.

Porro ex Natura Circuli est $ax - xx = vv$. Et inde per Prob. 1. $a - 2x = \frac{2v}{v}$ sive $\frac{a - 2x}{2v} = \frac{v}{v}$.

Adhuc ex Natura Trochoidis est LD = Arc AL; adeoque $v + t = y$. Et inde per Prob. 1. $v + t = z$.

Deniq. pro fluxionibus v et t valores hic substituantur, et emerget

$\frac{a - 2x}{v} = z$ unde per Prob. 1. deducitur $-\frac{av}{vv} + \frac{xv}{vv} - \frac{v}{v} = z$. Et his inventis fac $\frac{1+z^2}{z} = -DH$, et erige HC.



Corrol. Latereum ex his consecretur.

1. Quod sit DH = 2BL, & CH = 2BE, sive quod EF in N bisecat, CD Radium Curvaminis. Et hoc patebit, substituendo valores z & z jam inventos in Equatione $\frac{1+z^2}{z} = DH$, et exitum probe reducendo.

2. Hinc Curva FCK in qua Centrum Curvaminis indefinitè versatur est alia huic aequalis Trochoidis cujus vertex ad I & F adjacent hujus cuspidibus. Nam Circulus FL aequalis ALE et similiter positus, describatur et agatur CB parallela EF circuloq. occurrens in λ . Et erit arc FL (= arc EL = NF) = C λ .

3. CD quæ recta est ad Trochoidem IAF, contingit Trochoidem IKF in C.

4. Hinc (inversis Trochoidibus) si superioris Trochoidis cuspidi K pondus ad distantiam KA sive 2EA filo appensum innitatur et undulante pondere filum se applicet ad Trochoidis partes KF & KI hinc inde obstantes ne in rectum distendatur, et cogentes ut ad eorum normam dum digreditur perpendicularo paulatim de-

super

desuper inflectatur parte CD sub infimo contactus puncto manente recta: pondus in inferioris Trochoidis Perimetro movebitur utpote cui filum CD semper perpendicularum est.

5. Est itaqz tota fili longitudo KA aequali Perimetro Trochoidis KCF, ejusqz pars CD aequalis parti Perimetro CF.

6. Cum filum circa mobile punctum C tanquam Centrum unde-
lendo convolvitur; superficies per quam tota CD continuo trajicitur
erit ad Superficiem per quam pars CN supra rectam IF simul trajicitur
ut CD^2 ad CN^2 hoc est ut 4 ad 1. Est itaqz Area CFN quarta pars
Area CFD, et Area KCNE quarta pars Area ACDB.

7. Quinimo cum subtensa EL sit aequalis & parallela CN et
circa immobile Centrum E perinde ac CN circa Mobile Centrum C
circumagitur, aequales erunt Superficies per quas simul trajiciuntur
nempe Area CFN et Circuli Segmentum EL. Et inde Area NFD
trippla erit Segmenti intus, ac tota EADF trippla Semicirculi.

8. Deniqz cum pondus D attingit punctum F totum filum
circa Trochoidis Perimetrum KCF flectatur, Radius Curvaminis
CD manente nullo. Et proinde Trochoidis IAF ad ejus cuspidem F curvior
est quam quilibet Circularis, et cum Tangente BF producta constituit
Angulum Contactus infinite majorem quam Circularis cum recta potest
constituere.

Sunt etiam Anguli contactus Trochoidalibus infinite majores
Et illis deinceps alij infinite majores, et sic in infinitum, et tamen
ini sunt infinite minores reclinatis. Sic $xx = ay$, $x^3 = by^2$, $x^4 = cy^3$, $x^5 = dy^4$ &c
denotant Seriem Curvarum quarum qualibet posterior cum Basi
constituit Angulum contactus infinite majorem quam prior cum eadem
Basi potest constituere. Estqz Angulus contactus quem prima $xx = ay$
constituit, ejusdem generis cum circularibus, et ille quem secunda
 $x^3 = by^2$ constituit, ejusdem generis cum Trochoidalibus. Et quamvis
subsequentium anguli Angulos precedentium perpetim infinite su-
perant, tamen Anguli reclinati magnitudinem nunquam possunt
assequi.

Ad eundem modum $x = y$, $xx = ay$, $x^3 = b^2y$, $x^4 = c^3y$ &c denotant
Seriem linearum quarum subsequentium Anguli advertex cum
Basibus confecti sunt Angulis precedentium perpetim infinite mino-
res. Quinetiam inter Angulos contactus duorum quorumlibet ex
his generibus possunt alia Angulorum, se infinite superantium
intercedentia generis in infinitum excogitari.

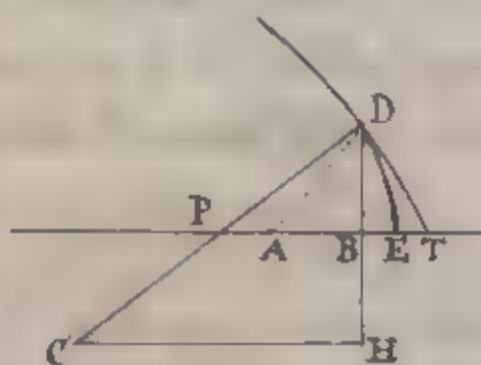
Angulorum vero contactus unum genus esse infinite majus alio
constat cum unius generis Curva uterqz magna inter rectam tangentem
et alterius generis Curvam quantumvis parvam iuxta punctum contac-
tus non potest interiacere: sive cujus Angulus contactus necessario con-
tinet alterius Angulum contactus ut partem totius. Sic Curva $x^4 = cy^3$

Angulus contactus quem cum Basi constituit necessario continet Angulum contactus Curvae $x^3 = by^2$. Qui vero se mutuo superare possunt Anguli sunt ejusdem generis, uti de praefatis Angulis Trochoidis et hujus Curvae $x^3 = by^2$ contigit.

Et his patet Curvas in quibusdam punctis posse infinite rectiores esse vel infinite curviores qualibet Circulo et tamen formam Curvarum non ideo amittere. Sed haec in transitu.

Exempl. 5.

Esto ED Quadratrix ad Circulum Centro A descriptum pertinens ac DB ad AE normaliter demissa dic AB = x, BD = y, & AE = 1. Eritque $yx - y^2 - yx^2 = xy$ ut supra. Quae Aequatio scripta 1 pro x, & 2 pro y fit $zx - zy^2 - zx^2 = y$ Et inde per prob. 1. elicitur $zx - zy^2 - zx^2 + zx - 2zxx - 2xyy = y$. Factaque reductione et scriptis iterum 1 pro x & 2 pro y, exit $z = \frac{2z^2y + 2zx}{x - xx - yy}$. Invenitis autem z & 2 fac $\frac{1 + 2z}{z} = DH$. et age HC ut supra.



Si constructionem concinnare placeat per brevem invenies nempe ad DT duc normalem DP occurrentem AT in P, et fac esse $2AP : AE :: PT : CH$.

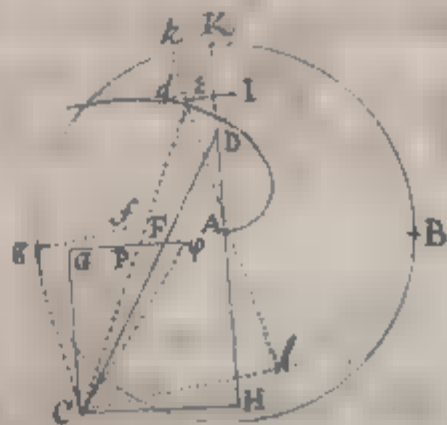
Scilicet est $z = \frac{y}{x - xx - yy} = \frac{BD}{BT}$, et $zy = \frac{BD^2}{BT} = -BP$. et $zy + x = -AP$, et $\frac{2z}{x - xx - yy}$ in $zy + x = \frac{2BD}{AE \times BT^2}$ in $-AP = z$. Praeterea est $1 + 2z = \frac{PT}{BT}$, (utpote $= 1 + \frac{BD^2}{BT^2} = \frac{DT^2}{BT^2} = \frac{DT^2}{BT^2}$) adeoque $\frac{1 + 2z}{z} = \frac{PT \times AE \times BT}{-2BD \times AP} = DH$. Denique est $BT : BD :: DH : CH = \frac{PT \times AE}{-2AP}$. Ubi valor negativus tantum arguit CH capi eadem esse ad partes DH versus AB.

Eadem methodo Spiraliū et aliarum quarumvis Curvarum curvatura, calculo brevissimo determinari potest.

Ad Curvaturam praeterea cum Curvae alijs modis ad rectas referuntur, sine praevia reductione determinandam jam potuit haec Methodus applicari perinde ut in determinando Tangentes factum est, sed cum omnes Geometricae Curvae ut et Mechanicae (praesertim ubi definientes conditiones ad infinitas Aequationes uti post ostendam reducuntur) ad rectangulas Ordinatas referri possint, videor satis praestitisse. Qui plura desiderat haud difficulter proprio Marte supplebit. Praesertim si in ejus rei illustrationem ex abundanti Methodum pro Spiraliū adjecero.

Esto

Leto BK Circulus A Centrum ejus B punctum in Circumferentia datum, AD d Spiralis, DC perpendicularum ejus, & C Centrum curvaturae ad punctum D. Ductaq; ADK recta et ei; parallela et aequali CG, ut et normali GF occurrentes CD in F. Dic AB vel AK = 1 = CG, BK = x, AD = y, & GF = z. Praeterea concipe punctum D per infiniti parvum spatium Dd in Spirali moveri, et perinde per d agi semidiametrum AK, ei; parallelum et aequalem CG, et normalem GF occurrentem Cd in f, cui etiam GF occurrat in P; Produca GF ad q ut sit Gq = gf, et ad AK demitte normalem de et produca donec CD conveniat ad I; Et ipsarum BK, AD, ac Gq contemporanea momenta erunt Kk, De Kf q quae perinde dicentur x xo, y xo, z xo.



Nam est AK: Ae (AD:: kK: de = oy, ubi assumo x = 1 ut supra). Item CG: GF:: de: εD = oy z, adeoq; yz = y, Praeterea CG: CF:: de: dD = oy x CF:: dD: dI = oy x CF². Ad haec propter ∠PCq (= ∠GCg) = ∠DAd, & ∠CPq (= ∠CDI) = ∠cdD + rect. = ∠ADd, Δ CPq & ADD sunt similia & inde AD:Dd:: CP (CF): Pq = ox CF² unde aufer Fq & restabit PF = ox CF² - ox z. Deniq; demisso CH normali ad AD est PF: dI:: CG: εH vel DH = $\frac{y \times CF^2}{CF^2 - z}$ vel substituto 1 + zz pro CF² erit DH = $\frac{y + yzz}{1 + zz - z}$.

Et nota quod in hujusmodi computationibus quantitates (ut AD & Ae) pro aequalibus habeo quarum ratio a ratione aequalitatis non nisi infiniti parum differt.

Ex his autem prodit hujusmodi Regula: Relatione inter x & y per quamlibet Aequationum definita quae relationem fluctuum x & y ostendat, Prop. 1. et substitue 1 pro x & yz pro y. Deinde ex Aequatione procedente quare denuo per Prob. 1. relationem inter x, y & z et iterum substitue 1 pro x. Prior exitus per debitam reductionem dabit y & z et posterior dabit z, quibus cognitis fac $\frac{y + yzz}{1 + zz - z} = DH$, et erige normalem HC Spiralis perpendicularo DC prius ducto occurrentem in C, & erit C Centrum Curvaturae, vel quod eodem recidit capite CH:HD:: z: 1 et age CD.

Exempl. 1.

Si datur ax = y (Aequatio ad Spiralem Archimedeam) erit per Prob. 1. ax = y sive scripto 1 pro x & yz pro y) a = yz, et hinc denuo per Prob. 1. erit 0 = yz + yz. Quare ex dato quolibet Spiralis puncto D, et inde Longitudine AD sive y, dabuntur z (= $\frac{a}{y}$) & z (= $-\frac{yz}{y}$ sive = $-\frac{ay}{y}$). Quibus cognitis fac 1 + zz - z: 1 + zz:: DA (y): DH. Et 1: z:: DH: CH.

Et hinc facile deducitur hujusmodi constructio. Produca AB ad Q ut sit AB: arc BK:: arc BK: BQ, Et fac AB + AQ: AQ:: DA: DH:: a: HC.

Exempl.

Exempl. 2.

Si $ax^2 = y^3$ definit relationem inter BK & AD: obtinebis (per Prob. 1.) $2axx = 2y^2$, sive, $2ax = 3y^2$, Et inde rursus $2ax = 3y^2 + 9zy^2$. Est itaq; $z = \frac{2ax}{3y^2}$, & $z = \frac{2a - 9zy^2}{3y^2}$. Quibus cognitis fac $4 + 2x - z : 1 + 2z :: DA : DH$, vel opere concinnato, fac $9xx + 6 : 9xx + 4 :: DA : DH$.

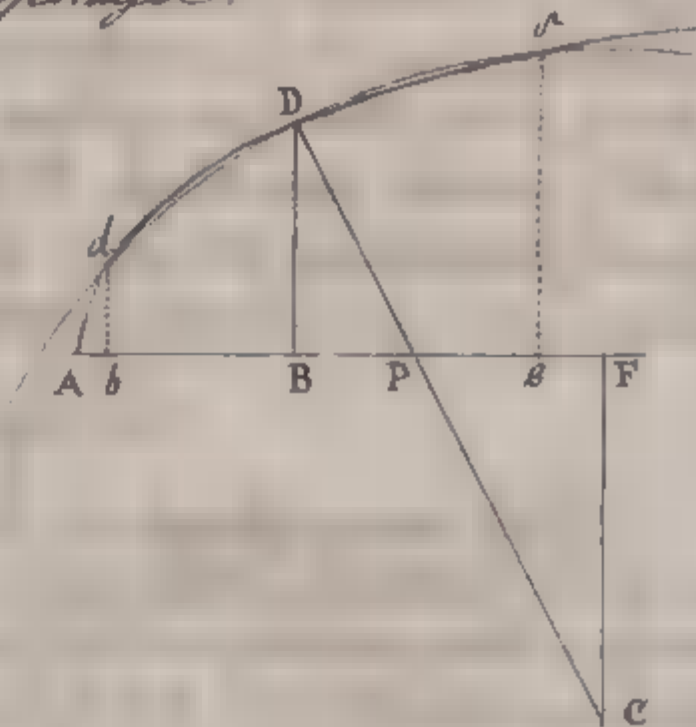
Exempl. 3.

Ad eundem modum si $ax^2 - bxy = y^3$ determinat relationem BK ad AD, orietur $\frac{2ax - by}{bxy + 3y^3} = z$, et $\frac{aa - 2bxy - b^2xy - 9z^2y^3}{bxy + 3y^3} = z$. Ex quibus DH, et inde punctum C determinatur ut antea.

Et sic aliarum quarumvis Spiritalium Curvaturam nullo negotio determinabis. Imo et ad horum exemplar Regulas pro quibuslibet Curvarum generibus excogitare.

Absolvi tandem Problema, sed cum Methodum adhibuerim a vulgaribus operandi modis satis diversam, et ipsum Problema non sibi ex eorum numero quorum contemplatio apud Geometras incedebat: ino allata Solutionis illustrationem et confirmationem non gravabor aliam Solutionem attingere, magis obviam et usitatam in ducendo. Tangentes methodis attingam. Utpropterea si Centro et intervallo quovis Circulus describi concipiatur qui Curvam quamlibet in pleribus punctis secet, et Circulus ille contrahatur vel dilatetur donec duo intersectionum puncta conveniant, is Curvam ibidem tanget. Et propterea si Centrum ejus accedere vel recedere a puncto contactus fingatur donec tertium intersectionis punctum cum prioribus in puncto contactus conveniat, is aequo curvus ac Curva in illo puncto contactus evadet. Quemadmodum in ultimo quinq; Symptomatum Centri Curvamenis supra monui, e quorum Singulis dixi Problema diversimodè conficere potuisse.

Centro itaq; C et Radio CD describatur Circulus secans Curvam in punctis d, D = S. Et demissis db, DB, SB, & CF ad Basem AB normalibus: dic AB = x, BD = y, AF = v, FC = t, ac DC = s; et erit BF = v - x, ac DB + FC = y + t. Quorum Quadratorum aggregatum aequatur Quadrato DC. Hoc est $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 + 2ty + t^2 = s^2$.



Quam si placet abbreviare possis fingendo $v^2 + tt - ss =$ Symbolo cuivis q^2 , et evadet $x^2 - 2vx + y^2 + 2ty + q^2 = 0$. Postquam vero t, v & q inveneris si s desideres fac $= \sqrt{v^2 + t^2 - q^2}$. Propositor

Proponatur jam qualibet Aequatio pro Curva definienda cujus
Flexura quantitatem invenire oportet et ejus ope alterutrum quantita-
tem x vel y extermina et emerget Aequatio cujus radices (db , DB , db
 dx si extermines x , vel Ab , AB , Ab dy si extermines y) sunt ad in-
tersectionum puncta (d , D , d , dx) Et proinde cum ax istis tres evadent
aequales, Circulus et Curvam contingit et erit ejusdem Curvitas ac
Curva in puncto contactus aequales autem evadent conferendo Aequatio-
nem cum alia totidem dimensionum Aequatione fictitia cujus tres sunt
Aequales Radices ut docuit Cartesius; vel expeditius multiplicando
terminos ejus bis per Arithmetica Progressionem.

Exempl.

Sit $ax = yy$ (Aequatio ad Parabolam) et exterminato
 x (substituendo nempe in Aequatione superiori valorem
ejus $\frac{yy}{a}$) prodibit..... $\frac{y^4}{aa} - \frac{2v}{a} y^2 + 2ty + y^2 = 0$

Cujus a Radicibus y tres defient fieri aequales.

Et in hunc finem terminos per Arithmetica 4. 2. 1. 0.
Progressionem bis multiplico ut hic videre est 3. 1. 0. -1.
et exit..... $\frac{12y^4}{aa} - \frac{4v}{a} y^2 + 2y^2 = 0,$

sive $v = \frac{3y^2}{a} + \frac{1}{2}a$. Unde facili colligitur esse $BF = 2x + \frac{1}{2}a$, ut supra.

Quamobrem dato quovis Parabola puncto D , duc perpendicularum
 DP et in axe cape $PF = 2AB$, et erige normalem FC occurrentem DP
in C , et erit C desideratum Centrum curvitas.

Idem in Ellipsi et Hyperbola prestare possis sed calculo
satis molesto, et in alijs Curvis ut plurimum fastidiosissimo.

De Quaestionibus quibusdam cognatis.

Ex hujus Problematis resolutione consecretur aliorum nonnullorum confectiones. Cujusmodi sunt,

1. Invenire punctum ubi Linea datam habet Curvaturam.

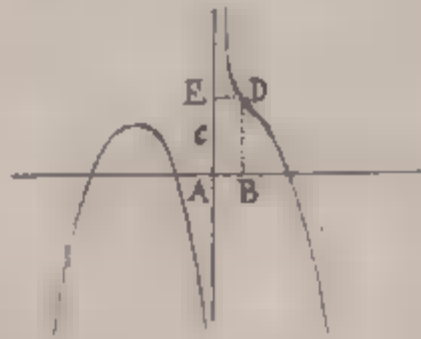
Sic in Parabola $ax = yy$, si punctum quaeratur ad quod Radius Curvaturae sit data Longitudo f ; e Centro Curvaturae ut prius invento radium determinabis esse $\frac{x+4x}{2z} \sqrt{2z^2 + 4zx}$. quem pone aequalem f . Et facta reductione emerget $x = -\frac{1}{4}a + \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + f^2}$.

2. Invenire punctum Rectitudinis.

Punctum Rectitudinis voco ad quod Radius flexionis infinitus evadit, sive Centrum infinitè distans; quale est ad verticem Parabola $ax = y^2$. Et hoc idem plerumq. limes est flexionis contrariae cujus determinationem supra posui. Sed et alia haud inelegans ex hoc Problemate scaturit. Nempe quo longior est Radius flexionis eo minor erit Angulus DC d (fig. p.) et pariter Momentum & adeoq. fluxio quantitatis z una diminuetur, ita ut per ejus radij infinitatem prorsus evanescant. Quare ergo fluxionem z et suppone nullam esse.

Quemadmodum si limitem flexus contrarij in Parabola secundi generis cujus ope Cartesius construxit Aequationes sex dimensionum determinare oportet. Ad illam Curvam Aequatio est $x^3 - bx^2 - cdx + bcd + dxy = 0$. Et hinc per Prob. 1. exit $3xx^2 - 2bxx - cdx + dxy + dxy = 0$; Quare, scripto 1 pro x & 2 pro y , fit $3x^2 - 2bx - cd + dy + dxy = 0$; unde rursus per Prob. 1. exit $6xx - 2bx + dy + dxy + dxy = 0$; Et hac scripta iterum 1 pro x , 2 pro y , et 0 pro z , fit $6x - 2b + 2dx = 0$. Jam extrema z scribendo pro dx valorem $2b - 3x$, in Aequatione $3x^2 - 2bx - cd + dy + dxy = 0$ et proveniet $-cd + dy = 0$, sive $y = c$.

Quamobrem ad punctum A erige perpendiculum $AE = c$. Et per E. duc ED parallelam AB, Et punctum D ubi Parabola partem convexo-concavam secuerit erit in confinio Flexionis contrariae.



Similq. Methodo alia Rectitudinis puncta qua non interjacent partibus contrariae flexis determinari possint. Veluti si $x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - b^3y = 0$ Curvam definiat, exinde per Prob. 1. imprimis producet $4x^3 - 12ax^2 + 12a^2x - b^3z = 0$. Et hinc denuo $12x^2 - 24ax + 12a^2 - b^3z = 0$, ubi suppone $z = 0$, et facta reductione prodibit $x = a$. Quamobrem sume $AB = a$ et BD normaliter erecta Curva in desiderato Rectitudinis puncto D occurret.

3. Invenire

6. Luce in quamlibet Curvam incidente, invenire Focum sive concursum Radiorum circa quodpiam ejus punctum Refractorum.

Curvaturam ad istud Curvæ punctum quære, et Centro Radiog. curvaturæ Circulum describe; Dein quære concursum Radiorum a Circulo circa istud punctum refractorum. Nam idem erit concursus refractorum a propositâ Curvâ.

7. His addi potest particularis inventio Curvaturæ ad Vertices Curvarum ubi normaliter secant Bases. Nempe punctum in quo curvæ perpendicularum cum Basi conveniens ipsam ultimo secuerit, est Centrum Curvaturæ ejus.

Quamobrem habitâ relatione inter Basin x & rectangulum applicatam y , et inde (per Prob. 1.) relationem inter fluxiones \dot{x} & \dot{y} ; valor $\dot{y}\dot{y}$, si in \square scribas 1 pro \dot{x} , & fingas $y=0$ erit Radius Curvaturæ.

Sic in Ellipsi $a\dot{x} - \frac{a}{b}xx = \dot{y}\dot{y}$, est $\frac{a\dot{x}}{2} - \frac{a\dot{x}x}{b} = \dot{y}\dot{y}$, qui valor $\dot{y}\dot{y}$ si suppona $y=0$ et consequenter $x=0$, et scribas 1 pro \dot{x} , evadet $\frac{1}{2}a$ radius Curvaturæ. Et sic ad vertices Hyperbolæ & parabolæ radius Curvaturæ erit etiam dimidium Lateris recti.

Atq; ita ad Conchoideam Aequatione $\frac{b^2c^2}{xx} + \frac{2bcc}{x} + \frac{cc}{bb} - 2b\dot{x} - x\dot{x} = \dot{y}\dot{y}$ definitam valor $\dot{y}\dot{y}$ ope Prob. 1. invenietur $-\frac{b^2c^2}{x^3} - \frac{bc^2}{x^2} - b - x$. Qui supponendo $y=0$, & inde $x=c$ vel $-c$, evadet $-\frac{b^2}{c} - 2b - c$, vel $\frac{b^2}{c} - 2b + c$ radius Curvaturæ. Fac ergo $AE:EG::EG:EC$ (vide Fig: Prob. 4) Et $Ae:eG::eG:ec$, et habes Curvaturæ centra C & c ad Vertices conjugatarum Conchoidum E & e .

Probl. 6.

Curvature ad datum Curvæ alicujus Punctum
Qualitatem determinare.

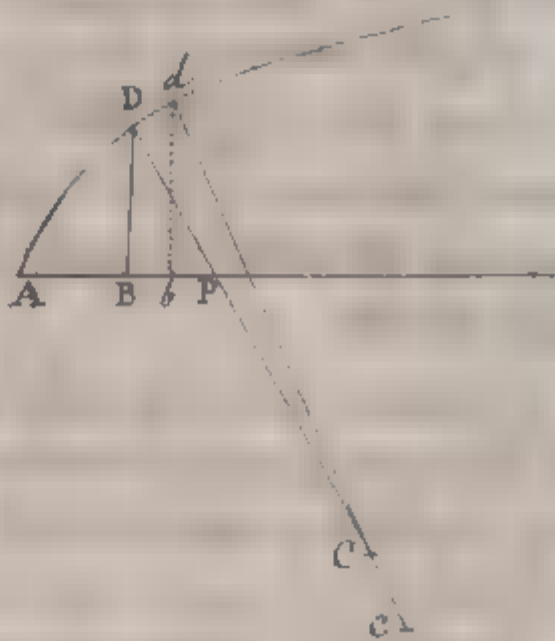
Per Qualitatem Curvature intelligo formam ejus quatenus est plus vel minus inequalis, sive quatenus plus vel minus variatur in processu per diversas partes Curvæ. Sic interroganti qualis sit Circuli Curvatura, responderi potest quod sit uniformis sive invariata: Et interroganti qualis sit Curvatura Spiralis quæ describitur per motum puncti D (fig.) cum accelerata celeritate AD in recta AK uniformiter circa Centrum A gyrate progrediatis ab A adeo ut recta AD ad Arcum BK dato puncto K descriptum rationem habeat numeri ad Logarithmum ejus, responderi potest quod sit uniformiter variata sive quod sit æquabiliter in æquabilis. Et sic aliæ Curvæ in singulis earum punctis aliquales pro Curvature variatione denominari possunt.

Quæritur itaq; Curvatura circa aliquod Curvæ punctum inequalitas sive variatio. Quæ de causa animadvertendum est.

1. Quod ad puncta in similibus Curvis similiter posita similis est inequalitas sive variatio Curvature.
2. Et quod momenta radiorum Curvature ad illa puncta sunt proportionalia contemporaneis momentis Curvarum, et fluxionis fluxionibus.
3. Atq; adeo quod ubi fluxiones illæ sunt proportionales dissimiles erit inequalitas Curvature. Ut pote major erit inequalitas ubi major est ratio fluxionis radij Curvature ad fluxionem Curvæ: Adeoq; fluxionum ratio illa immerito dici potest index inequalitatis sive variationis Curvature.

Ad Curvæ alicujus AD puncta D ac d, infinitè parum distantia sunt radij Curvature DC ac dc; Et existente Dd momenta Curvæ erit Cc contemporaneum momentum radij Curvature, et $\frac{Cc}{Dd}$ index inequalitatis Curvature. Nempe tanta dicetur inequalitas illa, quantum esse indicat rationis illius $\frac{Cc}{Dd}$ quantitas sive Curvatura dicetur tanto dissimilior Curvaturæ Circuli.

Demissis jam ad quamlibet AB occurrentem DC in P rectangulis applicatis DB ac db, dic AB = x, BD = y, DP = t, DC = v, & inde Bb = ẋt, eritq; Cc = v̇t; et BD:DP::Bb:Dd = $\frac{ẋt}{t}$, ac $\frac{Cc}{Dd} = \frac{v̇t}{t}$ sive $\frac{v̇}{t}$, supposito ẋ = 1. Quamobrem relatione inter x & y per quamlibet Aequationem definita, et inde juxta Prob. 4 & 5. invento perpendicularo DP sive t, et radio Curvature v, ejusq; radij fluxione v̇ per Prob. 1; dabitur index inequalitatis Curvature $\frac{v̇}{t}$.



Exemp. 1.

Exempl: 1.

Sit $2ax = yy$ (Equatio ad Parabolam) et (per Prob. 4) erit $BP = a$ adeoque $DP = \sqrt{aa + yy} = t$. Item (per Prob. 5) $BF = a + 2x$. Et $BP : DP :: BF : DC = \frac{at + 2tx}{a} = v$. Nam Equationes $2ax = yy$, & $aa + yy = tt$, & $\frac{at + 2tx}{a} = v$, per Prob. 1. dant $2ax = 2xy$, & $2xy = 2tt$, & $\frac{at + 2tx + 2tx}{a} = v$. Quibus ordinatis, et posito $x = 1$, orientur $y = \frac{a}{2}$, $t = \frac{\sqrt{5}}{2}$ vel $\frac{2}{\sqrt{5}}$, & $v = \frac{at + 2tx + 2tx}{a}$ et sic inventis y, t, v habebitur $\frac{yy}{t}$ index inaequalitatis Curvaturae.

Quomodo si in numeris definitur $a = 1$, sive $2x = yy$ & $x = \frac{1}{2}$, erit $y = 1$ ($= \sqrt{2x}$), $y (= \frac{a}{2}) = 1$, $t (= \sqrt{aa + yy}) = \sqrt{2}$, $t (= \frac{a}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, & $v (= \frac{at + 2tx + 2tx}{a}) = 3\sqrt{2}$. Adeoque $\frac{yy}{t} = 3$ index inaequalitatis.

Sin autem definitur $x = 2$, erit $y = 2$, $y = \frac{a}{2}$, $t = \sqrt{5}$, $t = \frac{a}{2}$, & $v = 3\sqrt{5}$, Adeoque $\frac{yy}{t} = 6$ index inaequalitatis.

Quamobrem inaequalitas Curvaturae ad punctum a quo ad Axem demissa Ordinationem applicata aequatur lateri recto Parabolae dupla est ejus ad punctum a quo demissa Ordinationem applicata aequatur dimidio ejusdem Lateris recti: Hoc est Curvatura in priori casu duplo dissimilior est Curvatura Circuli quam in posteriori.

Exempl: 2.

Sit $2ax - bxx = yy$, et per Prob. 4 erit $a - bx = BP$, et inde $ax - 2abx + b^2x^2 + y^2 = t^2$, sive $aa - byy + yy = tt$. Item per Prob. 5 erit $DH = y + \frac{y^2 - by^2}{aa}$, ubi si $yy - byy$ substituatur $tt =$ erit $DH = \frac{ay}{aa}$. Et est $BD : DP :: DH : DC = \frac{t^3}{aa} = v$. Nam per Prob. 1. Equations $2ax - bxx = yy$, & $aa - by^2 + yy = tt$, et $\frac{t^3}{aa} = v$, dant $a - bx = yy$ et $yy - byy = tt$ & $\frac{t^3}{aa} = v$. Et sic invento v dabitur $\frac{yy}{t}$ index inaequalitatis Curvaturae.

Sic ad Ellipsin $2x - 3xx = yy$, ubi est $a = 1$, $b = 3$, si supponatur $x = \frac{1}{2}$ erit $y = \frac{1}{2}$, $y = -1$, $t = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $t = \sqrt{2}$, $v = 3\sqrt{\frac{1}{2}}$: Et $\frac{yy}{t} = \frac{3}{2}$ index inaequalitatis Curvaturae. Unde patet Curvaturam hujus Ellipsis ad hic definitum punctum D esse duplo minus inaequalem (sive duplo similiorem Curvaturae Circuli) quam Curvatura Parabolae ad illud ejus punctum a quo ad Axem demissa Ordinationem applicata aequatur dimidio ejus Lateris recti.

Si conclusiones in his Exemplis concinnare placet ad Parabolam $2ax = yy$ erit $\frac{yy}{t} = \frac{3}{2}$ index inaequalitatis, et ad Ellipsin $2ax - bxx = yy$ erit index $\frac{yy}{t} = \frac{3y - 3by}{aa} \times BP$, et sic ad Hyperbolam $2ax + bxx = yy$, observata analogia erit index $\frac{yy}{t} = \frac{3y + 3by}{aa} \times BP$. Unde patet quod ad diversa puncta cujusvis Conicae Sectionis sectum spectata Curvaminis inaequalitas est ut recti angulum $BD \times BP$. Et quod ad diversa puncta Parabolae est ut Ordinationem applicata BD .

Ceterum cum Parabolae sit simplicissima Linearum inaequali Curvaturae flexarum, ejusque Curvaturae inaequalitas tam levi negotio determinatur (utpote cujus index sit $\frac{6x}{a}$ Ordin. applic.) aliarum Curvarum Curvaturae ad Curvaturam hujus non incommode referri possunt.

Quomodo si quaeratur qualis sit Ellipseos $2x - 3xx = yy$ curvatura ad illud ejus punctum quod definitur assumendo $x = \frac{1}{2}$: Quoniam index ejus (ut supra) sit $\frac{3}{2}$, responderi potest esse similem Curvaturae Parabolae $6x = yy$ ad illud ejus punctum inter quod et Axem recta $= \frac{3}{2}$ Ordinationem applicatur. Sic.

Sic cum Linea Spiralis ADE (fig. p.) jam ante descripta fluxio sit ad fluxionem subtense AD in data quadam ratione puta d ad e: versus partes concavas ejus erige ad AD normalem AP = $\frac{e}{\sqrt{dd-ee}} \times AD$, et erit P Centrum Curvature, et $\frac{AP}{AD}$ sive $\sqrt{\frac{dd-ee}{e}}$ index in aequalitatis ejus. Quare Spiralis hæc Curvaturem habet ubiq; similiter inequabilem ac parabola $bx = yy$ habet in illo ejus puncto = quo demittitur ad Axem Ordinationis applicata = $\sqrt{\frac{dd-ee}{e}}$.

Et sic index inequalitatis ad quodvis Trochoidis punctum V (fig.) invenietur esse $\frac{AB}{BL}$. Quare Curvature ejus ad idem V tam inequalis est sive tam dissimilis Curvature Circuli, quam Curvature parabola cujusvis $ax = yy$ ad illud ejus punctum ubi Ordinationis applicata aequatur $\frac{1}{6}ax \times \frac{AB}{BL}$.

Ex his credo Sensus Problematis satis elucescet, quo bene perspecto non difficile erit animadvertenti Seriem rerum supra traditarum plura exempla de proprio suppeditare et hujusmodi complures alias operandi methodos, prout res exiget, concinnare. Quin etiam cognata Problemata (ubi perplexa computatione non continetur & fatigatur) haud majori difficultate transiget: Cujusmodi sunt

1. Invenire punctum Curvae alicujus ubi vel nullam, vel infinitam, vel Maximam aut Minimam, vel datam quamvis habeat inequalitatem Curvature. Sic ad vertex Conicarum Sectionum nulla est inequalitas Curvature; ad cuspidem Trochoidis infinita est; et ad puncta Ellipseos maxima est ubi rectangulum $BD \times BP$ sit maximum; hoc est, ubi lineæ Diagonales rectanguli parallelogrammi circumscripti Ellipsi secant cujus latera tangunt illam in principalibus verticibus.

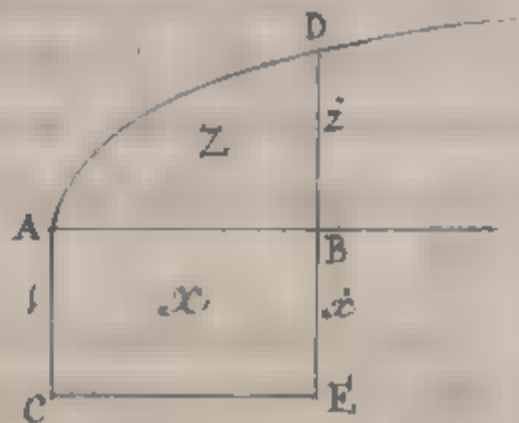
2. Curvam alicujus definitæ speciei, puta Conicam Sectionem determinare, cujus Curvature ad aliquod punctum & æqualis sit et similis Curvature alterius alicujus Curvæ ad datum punctum ejus.

3. Conicam Sectionem determinare ad cujus punctum aliquod Curvature & lineæ tangentis (respectu Axis) positio sit similis Curvature ac tangentis positione alterius alicujus Curvæ ad assignatum punctum ejus. Et hujus Problematis usus est ut vice Ellipsi secundæ generis quarum refringendi proprietates Cartesius in Geometria demonstravit. Conicæ Sectiones idem in Refractionibus quam proximè præstantes subrogari possint. Atq; idem de alijs Curvis intelligi.

Probl. 7.

Curvas pro arbitrio multas invenire quarum Area per
finitas. Equationes designari possunt.

Sit AB Basis Curvae, ad cuius initium A erigatur normalis AC = 1
et agatur CE parallela AB, sit etiam DB rect-
angula applicata occurrens rectae CE in
E, & Curva AD in D. Et concipe has Areas
ACEB & ADB a rectis BE & BD per AB delatis
generari. Et earum incrementa sive flux-
iones perpetim erunt ut lineae descriptentes
BE & BD. Quare parallelogrammum ACEB
sive AB x 1, dic x , Curvae Aream ABD dic
 z ; et fluxiones \dot{x} & \dot{z} erunt ut BE & BD adeoque profecto $\dot{x} = 1 = \dot{BE}$, erit
 $\dot{z} = \dot{BD}$.



Si jam ad arbitrium assumatur Aequatio quavis pro definienda
relatione z ad x , exinde per Prob. 1. elicietur \dot{z} . Atq; ita duae habebuntur
Equationes quarum posterior Curvam definit, et prior Aream
eius.

Exempla.

Assumatur $xxx = z$, & inde per Prob. 1. elicietur $2xx\dot{x} = \dot{z}$, sive $2xx = \dot{z}$
siquidem est $\dot{x} = 1$.

Assumatur $\frac{xxx}{a} = z$, et inde prodibit $\frac{3xxx}{a} = \dot{z}$ Aequatio ad Parabolam.

Assumatur $ax^2 = z$, sive $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = z$, et emerget $\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \dot{z}$, sive $\frac{1}{4}$
 $ax = \dot{z}$ Aequatio iterum ad Parabolam.

Assumatur praeterea $a^3x = xz$, sive $a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} = z$, et elicietur $-a^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{2}} = \dot{z}$
sive $a^{\frac{3}{2}} + zxxx = 0$; ubi negativus valor ipsius \dot{z} tantum denotat BC ca-
piendam esse ad partes contra BE.

Adhuc si assumes $c^2a^2 + c^2x^2 = z^2$, elicies $2c^2x = 2z\dot{z}$, et extermi-
nato z proveniet $\frac{cx}{\sqrt{aa + xx}} = \dot{z}$.

Vel si assumes $\frac{aa + xx}{b} = z$, dic $\sqrt{aa + xx} = v$, et erit
 $\frac{v^2}{b} = z$, et inde (per Prob. 1.) $\frac{2vv}{b} = \dot{z}$. Item Aequatio $aa + xx = vv$, per
Prob. 1, dat $2x = v\dot{v}$, cuius opes si extermine v , fiet $\frac{3vx}{b} = \dot{z} = \frac{2x}{b}$
 $\sqrt{aa + xx}$.

Si deniq; assumes $8 - 3xz + \frac{2}{3}z = z^2$, elicies $-3z - 3xz + \frac{2}{3}\dot{z} = 2z\dot{z}$. Quare
per assumptam Aequationem imprimis quare Aream z , ac deinde Ap-
plicatam \dot{z} per elicitam.

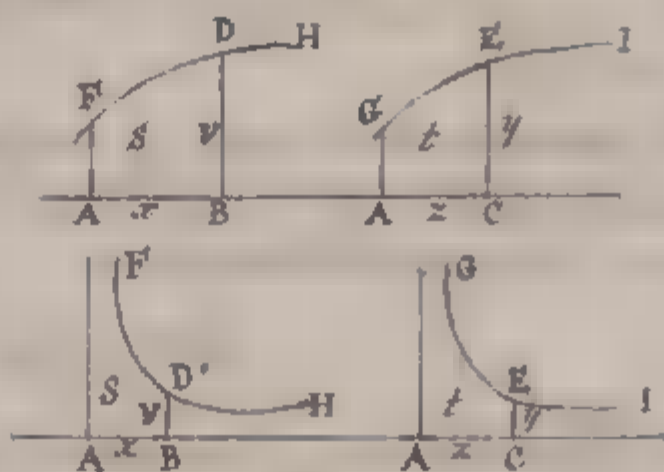
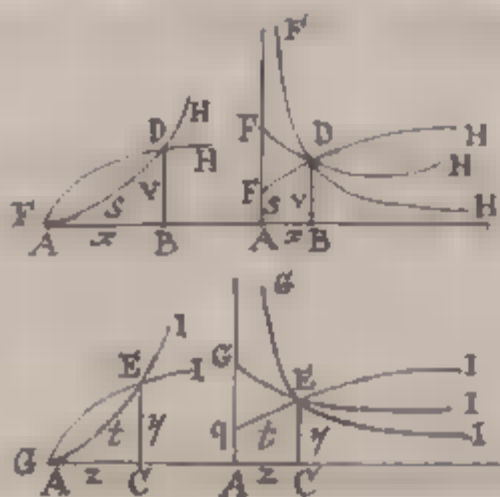
Atq; ita ex Areis qualescunq; Atingas semper possis Applicatas
determinare.

Prob. 8.

Probl: 8.

Curvas pro arbitrio multas invenire, quarum Area ad
Aream datae alicujus Curvae relationem habent per
finitas Aequationes designabilem.

Sit FDH data Curva, ac GEI quavis, et eorum Applicatas DB & EC
concepisse super Basibus AB et AC erectas incedere.



Et Arearum quas ita transigunt incrementa sive Fluxiones erunt
ut Applicatae illae ductae in eorum velocitates incedendi hoc est in Fluxiones
Basium. Sit ergo $AB = x$, $BD = v$, $AC = z$, ac $CE = y$, Area AFDB = s , Area
AGEC = t , ac Arearum Fluxiones sint \dot{s} et \dot{t} ; Eritq; $\dot{x}v : \dot{z}y :: \dot{s} : \dot{t}$. Quare si
supponatur $\dot{x} = 1$, & $v = \dot{s}$, ut supra; erit $\dot{z}y = \dot{t}$ et inde $\frac{\dot{t}}{\dot{z}} = y$.

Assumantur itaq; duae quavis Aequationes quarum ——— definiant rela-
tionem Arearum s ac t , & altera relationem Basium x & z , et inde
(per Prob. 1.) quarantur fluxiones \dot{t} & \dot{z} , & statueretur $\frac{\dot{t}}{\dot{z}} = y$.

Exempl. 1.

Data Curva AFD sit Circulus Aequatione $ax - xx = vv$ designatus
et quarantur aliae Curvae quarum Areae aequantur Areae ejus. Ex Hypo-
thesi ergo est $s = t$, et inde $\dot{s} = \dot{t} = v$. Et $y = (\frac{\dot{t}}{\dot{z}}) = \frac{v}{\dot{z}}$. Superest ut z determi-
netur assumendo relationem aliquam inter Bases x & z .

Veluti si fingas $ax = zz$, erit per Prob. 1, $a = 2xz$: Quare substitue $\frac{a}{2xz}$
pro \dot{z} , et fiet $y = (\frac{v}{\dot{z}}) = \frac{2vz}{a}$. Est autem $v = (\sqrt{ax - xx}) = \frac{z}{a} \sqrt{aa - zz}$; adeoque
 $\frac{2z}{a} \sqrt{aa - zz} = y$, Aequatio ad Curvam cujus Area aequatur Areae
Circuli.

Ad eundem modum si fingas $xx = z$, proveniet $2x = \dot{z}$, & inde $y = (\frac{v}{\dot{z}}) =$
 $\frac{v}{2x}$ et exterminato v et x , fiet $y = \frac{\sqrt{ax^2 - z}}{2x^2}$.

Vel si fingas $cx = xz$, proveniet $0 = z + xz$, et inde $-\frac{vz}{z} = y = -\frac{c}{2z} \sqrt{ax - a}$.

Atq; ita si fingas $ax + \frac{z}{2} = z$, opes Prob. 1. obtinebitur $a + \dot{s} = \dot{z}$, et inde
 $\frac{2v}{a + \dot{s}} = y = \frac{v}{a + v}$ quae Curvam Mechanicam designat.

Exempl. 2.

Exemp: 2.

Detur iterum Circulus $ax - xx = vv$, & quarantur Curvae quarum Area ad Area[m] ejus habeant aliam quamlibet assumptam relationem. Vult si assumas $cx + s = t$, et protereaingas $ax = xx$ mediante Prob: 1. elicias $c + s = t$ & $a = vx$. Quare est $y = (\frac{t}{x}) = \frac{cx + 2sx}{a}$, et substituto $\sqrt{ax - xx}$ pro s , & $\frac{vx}{a}$ pro x , fit $y = \frac{cx}{a} + \frac{vx}{a} \sqrt{ax - xx}$.

Quod si assumas $s - \frac{xx}{3a} = t$, & $x = z$, invenies ope Prob: 1. $s - \frac{xx}{3a} = t$, & $1 = \frac{t}{z}$. Adeoque $y = (\frac{t}{z}) = \frac{3}{2} \frac{vv}{a}$, sive $= v - \frac{vv^2}{a}$. Jam vero pro exterminando v , Aequatio $ax - xx = vv$, per Prob: 1. dat $a - 2x = vx$, & proinde est $y = \frac{2vx}{a}$, ubi si supprimas v , & x substituendo valores $\sqrt{ax - xx}$, & z emerget $y = \frac{2z}{a} \sqrt{ax - zz}$.

Si assumas $ss = t$, & $x = zz$, emerget $2ss = t$, & $1 = 2vx$, atq; adeo $y = (\frac{t}{z}) = 4ssz$, et pro s & x substitutis $\sqrt{ax - xx}$ & zz , fiet $y = 4szz \sqrt{a - zz}$. Aequatio ad Curvam Mechanicam.

Exempl: 3.

Ad eundem modum figurae assumptam relationem ad aliam quamvis datam figuram habentes inveniuntur. Sic data Hyperbola $cc + xx = vv$, si assumas $s = t$, et $xx = cx$, elicias per Prob: 1. $s = t$, & $2x = cx$, et inde $y = (\frac{t}{z}) = \frac{cs}{2x}$, & substitutis $\sqrt{cc + xx}$ pro s , & $c^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}$ pro x , proveniet $y = \frac{c}{z} \sqrt{cz + zz}$.

Atq; ita si assumas $xv - s = t$, & $xx = cx$, elicias $v + vx - s = t$, et $2x = cx$. Est autem $v = s$, & inde $ix = t$. Quare $y = (\frac{t}{z}) = \frac{cx}{z}$. Jam vero $cc + xx = vv$, ope Prob: 1. dat $x = vv$. Adeoque est $y = \frac{cx}{2v}$, et substitutis $\sqrt{cc + xx}$ pro v , & $c^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}$ pro x , fit $y = \frac{cx}{2\sqrt{cz + zz}}$.

Exempl: 4.

Adhuc videtur Cissoidea $\frac{xx}{\sqrt{ax - xx}} = v$, ad quam relata alia figurae sunt inveniendae, et ea de causa assumatur $\frac{2}{3} \sqrt{ax - xx} + \frac{2}{3} s = t$, fingit $\frac{2}{3} \sqrt{ax - xx} = h$, ejusq; fluxionem h et erit $h + \frac{2}{3} s = t$, et inde per Prob: 1. $h + \frac{2}{3} s = t$. Aequatio autem $\frac{ax^3}{3} - x^4 = hh$, per Prob: 1. dat $3ax^2 - 4x^3 = 2hh$, ubi si extermines h , fiet $h = \frac{3ax - 4xx}{2\sqrt{ax - xx}}$. Quare cum proterea sit $\frac{2}{3} s = (\frac{2}{3} v) = \frac{4xx}{6\sqrt{ax - xx}}$, erit $\frac{ax}{2\sqrt{ax - xx}} = t$. Porro ad determinandum x & z , assumatur $\sqrt{ax - ax} = z$, et ope Prob: 1. emerget $-a = vx$ sive $z = \frac{-a}{2x}$. Quare est $y = (\frac{t}{z}) = \frac{-2x}{\sqrt{ax - xx}} = \sqrt{\frac{2x}{a - x}} = \sqrt{ax} = \sqrt{aa - zz}$. Quae Aequatio sit ad Circulum, habebitur relatio Areae Circuli et Cissoideis.

Atq; ita si assumpsisset $\frac{2}{3} \sqrt{ax - xx} + \frac{1}{3} s = t$, & $x = z$, prodijset $y = \sqrt{az - zz}$ Aequatio denuo ad Circulum.

Non secus si detur Curva aliqua Mechanica possunt aliae ad eam relatae Curvae Mechanicae inveniri, sed ad eliciendum Geometricas convenit ut e rectis & invicem Geometricis dependentibus aliqua pro Basi adhibeatur, et ut Area ad Parallelogrammum complementalis quocunque supponendo fluxionem ejus valore Basin ductam in fluxionem Ordinationis Applicatae.

Exemp.

Exempl. 5.

Sic Trochoide ADF proposita refero ad Basin AB. et completo Parallelogrammo ABDG quare complementalem superficiem ADG (fig. P. 48.) concipiendo descriptam esse per motum rectae GD, et proinde fluxionem ejus valore illam GD in celeritatem progrediendi ductam; hoc est $x \times v$. Nam cum AL sit parallela Tangenti DT, erit AB ad BL ut fluxio ejusdem AB ad fluxionem applicata BD, hoc est ut 1 ad v. Quare est $v = \frac{BL}{AB}$, adeoque $xv = BL$; Et proinde Area ADG describitur fluxione BL: Atque adeo cum Area circularis ALB eadem fluxione describatur aequales erunt.

Pari ratione si concipias ADF esse Figuram Arcuum (fig. sp. 48.) sive Sinuum versorum, hoc est cujus Applicata BD aequatur Arcui AL: cum fluxio Arcus AL sit ad fluxionem Basis AB, ut PL ad BL, hoc est ut $1 : \frac{1}{2}a$: $\sqrt{a^2 - xx}$, erit $v = \frac{a}{2\sqrt{a^2 - xx}}$. Adeoque ix fluxio Area ADG erit $\frac{ax}{\sqrt{a^2 - xx}}$. Quare si ad ipsius AB punctum B recta aequalis $\frac{ax}{2\sqrt{a^2 - xx}}$ in Angulo recto applicari concipiatur, illa ad Curvam quandam Geometricam terminabitur cujus Area Basi AB adjacens aequatur Area ADG.

Et sic alijs figuris ff Arcuum Circuli, Hyperbolae vel cujusvis Curvae ad Arcuum istorum Sinus rectos vel versos, aut alias quasvis Geometricis determinabiles rectas lineas in datis Angulis applicationem constitutis, aequales Geometricae figurae inveniri possunt.

Circa Spiralium Areas levissimum est negotium. Ultrapote Centro Convolutionis A radio quovis AG (fig. sp.) descripto Arcu DG occurrente AF in G et Spirali in D; cum Arcus ille ad instar lineae super Basi AG incedentis describit Spiraliam Aream AHDG ita ut ejus Area fluxio sit ad fluxionem rectanguli $1 \times AG$ ut Arc GD ad 1; Si rectam GL Arcui isti aequalem erigas illa similiter incedendo super eadem AG describit Aream ALG aequalem Areae Spiralis AHDG; Curvam EIL existente Geometrica. Et praeterea si subtensa AL ducatur, erit $\Delta ALG (= \frac{1}{2} AG \times GL = \frac{1}{2} AG \times GD) =$ Sectori AGD, adeoque complementalis Segmenta ALI et ADH erunt etiam aequalia. Et haec non tantum Spirali Archimedea (ubi ALL evadit Parabola Apolloniana) sed et alijs quibuscumque conveniunt, adeo ut omnes eodem negotio in aequales Geometricas converti possint.

Possent plura hujus construendi Problematis Specimina afferre, Sed haec sufficiant cum sint adeo generalia ut quicquid hactenus Curvarum Areas inventum fuerit, vel in fallor inveniri possit, aliquo saltem modo complectantur, et ut plurimum leviori cura sine solitis ambagibus determinant.

Præcipuus

Principus autem hujus & precedentis Problematis usus est, ut
 assumptis Conicis Sectionibus vel quibuscumque notae magnitudinis —
 Curvis, aliae Curvae quae cum his conferri possunt, investigentur, et
 earum definientes Aequationes in Catalogum Ordinationis disponantur.
 Et constructo ejusmodi Catalogo, cum Curvae alicujus Area quaeritur,
 si Aequatio ejus definiens vel immediata in Catalogo reperitur vel
 in aliam quam Catalogus complectitur transformari potest, eandem
 cognoscere Aream ejus. Quinetiam Catalogus ille determinandi Cur-
 varum Longitudinibus Centris gravitatum, Solidis per Convolutionem
 generatis, Solidorum superficiibus, & cuilibet fluenti Quantitati per
 Analogam Fluxionum generatae, invenire potest.

Probl. 9.

Proposita alicujus Curvae Aream Determinare.

Problematis Resolutio in eo fundatur ut quantitatem fluentium relatio ex relatione fluxionum (per Prob. 2) eliciatur. Et imprimis si recte BD ejus motu quæsita Area AFDB describitur (fig. sp. 1) super Basi AB positione data erecte incedat, concipere ut supra parallelogrammum ABEC a parte ejus BE unitatem aequante interneas describi: Et posita BE fluxione parallelogrammi erit BD fluxio Areae quæsita.

Dic ergo $AB = x$, & erit etiam $ABEC (= 1 \times x) = x$, et $BE = 1$, dic insuper Aream $AFDB = z$, et erit $BD = \dot{z}$, ut et $= \frac{\dot{z}}{x}$, eo quod sit $x = 1$. Et summa per Aequationem definientem BD simul definitur fluxionum ratio $\frac{\dot{z}}{x}$, et eandem (per Prob. 2. Cas. 1.) elicietur relatio fluentium quantitatum x & z .

Exemp. 1.

Ubi BD sive \dot{z} valet simplicem aliquam quantitatem.

Detur $\frac{xx}{a} = \dot{z}$ vel $= \frac{\dot{z}}{x}$, Aequatio nempe ad Parabolam, et (per Prob. 2) emerget $\frac{\dot{z}^3}{3a} = z$. Est ergo $\frac{\dot{z}^3}{3a}$ sive $\frac{1}{3} AB \times BD =$ Areae Parabolicae AFDB.

Detur $\frac{xx^3}{aa} = \dot{z}$ Aequatio ad Parabolam secundi generis, et (per Prob. 2) emerget $\frac{\dot{z}^4}{4a^2} = z$, hoc est $\frac{1}{4} AB \times BD =$ Area AFDB.

Detur $\frac{a}{xx} = \dot{z}$, sive $a^3 x^{-2} = \dot{z}$ Aequatio ad Hyperbolam secundi generis et emerget $- \frac{1}{2} x^{-1} = z$, sive $-\frac{a^3}{2x} = z$, hoc est $AB \times BD =$ Areae infinitae longa HDBH (fig. sp. 1) ex altera parte Applicatae BD jacenti, ut innuit valor negativus.

Atq; ita si detur $\frac{a^4}{x^3} = \dot{z}$, emerget $-\frac{a^4}{2xx} = z$.

Præterea sit $ax = \dot{z}$, sive $a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \dot{z}$, Aequatio iterum ad Parabolam et proveniet $\frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = z$, hoc est, $\frac{2}{3} AB \times BD =$ Areae AFDB.

Sit $\frac{a^3}{x} = \dot{z}$, et fiet $2a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} = z$, sive $2 AB \times BD =$ AFDB

Sit $\frac{a^5}{x^3} = \dot{z}$, et fiet $-\frac{2a^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = z$, sive $2 AB \times BD =$ HDBH

Sit $a^2 x = \dot{z}$, et fiet $\frac{2}{3} a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{5}{3}} = z$, sive $\frac{2}{3} AB \times BD =$ AFDB.

Et sic in alijs.

Exemp. 2.

Ubi \dot{z} valet plures ejusmodi connexas Quantitates.

Sit $x + \frac{xx}{a} = \dot{z}$, et fiet $\frac{xx}{2} + \frac{xxa}{3a} = z$.

Sit $a + \frac{x^3}{xx} = \dot{z}$, et fiet $ax - \frac{a^3}{x} = z$

Sit $3x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{xx} - \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} = \dot{z}$, et fiet $2x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{x} - 4x^{\frac{1}{2}} = z$.

Exemp.

Exempl. 3.

Ubi praevia reductio per Divisionem requiritur.

Detur $\frac{aa}{b+x} = z$ (Aequatio ad Hyperbolam Apollonianam) et facta in infinitum Divisione, evadet $z = \frac{aa}{b} - \frac{aaa}{b^2} + \frac{aaaa}{b^3} - \frac{aaaaa}{b^4} \&c.$ Et inde (per prob. 2.) ut in cunctis Exemplis, obtinebitur $z = \frac{a^2x}{b} - \frac{a^3x^2}{2b^2} + \frac{a^4x^3}{3b^3} - \frac{a^5x^4}{4b^4} \&c.$

Detur $\frac{1+xx}{1+xx} = z$, & per Divisionem elicietur $z = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \&c.$ vel etiam $z = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \&c.$ Indegz (per prob. 2.) $z = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \&c. = AFDB$, vel $z = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} \&c. = HDBH$.

Detur $\frac{2xx^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}} - 3x} = z$, et per divisionem evadet $z = aa^{\frac{1}{2}} - 2xx + 7x^{\frac{3}{2}} - 13x^{\frac{5}{2}} + 34x^{\frac{7}{2}} \&c.$ Et inde (per prob. 2.) $z = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{2}} - \frac{14}{3}xx + \frac{14}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{13}{3}x^{\frac{5}{2}} + \frac{68}{7}x^{\frac{7}{2}} \&c.$

Exempl. 4.

Ubi praevia reductio per Extractionem Radicum requiritur.

Detur $z = \sqrt{aa+xx}$, (Aequatio nempe ad Hyperbolam) et radice ad usq. terminos infiniti multos Extracta, evadet $z = a + \frac{x}{2a} - \frac{x^3}{8a^3} + \frac{x^5}{16a^5} - \frac{5x^7}{128a^7} \&c.$ Atq. inde ut in precedentibus $z = aa + \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{128a^5} - \frac{5x^9}{1008a^7} \&c.$

Ad ~~modum~~ modum si detur $z = \sqrt{aa-xx}$ Aequatio scilicet ad Circulum obtinebitur $z = aa - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{128a^5} - \frac{5x^9}{1008a^7} \&c.$

Atq. ita si detur $z = \sqrt{x-xxx}$, Aequatio iterum ad Circulum proveniet extrahendo radicem $z = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} \&c.$ Adeoz est $z = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{10}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{7}{2}} \&c.$

Sic $z = \sqrt{aa+bx-xx}$, Aequatio denuo ad Circulum per Extractionem Radicis dat $z = a + \frac{bx}{2a} - \frac{xx}{2a} - \frac{b^2x^2}{8a^3} \&c.$ unde (per prob. 2.) elicitur $z = aa + \frac{bx^2}{4a} - \frac{x^3}{6a} - \frac{b^2x^3}{24a^3} \&c.$

Et sic $\sqrt{\frac{1+axx}{1-bxx}} = z$, per debitam reductionem dat $z = 1 + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{3}{8}bbx^4 \&c.$
 $\quad \quad \quad + \frac{1}{2}a \quad + \frac{1}{2}ab \quad - \frac{1}{8}aa$

Unde (per prob. 2.) $z = x + \frac{1}{6}bx^3 + \frac{3}{40}bbx^5 \&c.$
 $\quad \quad \quad + \frac{1}{6}a \quad + \frac{1}{20}ab \quad - \frac{1}{40}aa$

Sic deniq. $z = \sqrt[3]{a^3+xx^3}$, per Extractionem radici Cubicae dat $z = a + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{12a^5} + \frac{5x^9}{81a^8} \&c.$ Indegz $z = aa + \frac{x^4}{12a^2} - \frac{x^7}{63a^5} + \frac{x^{10}}{162a^8} \&c. = AFDB$ vel etiam $z = x + \frac{a^3}{3xx} - \frac{a^6}{9x^2} + \frac{5a^9}{81x^3} \&c.$ Indegz $z = \frac{x}{2} - \frac{a^3}{3x} + \frac{a^6}{36x^2} - \frac{5a^9}{567x^3} \&c. = HDBH$.

Exempl. 5.

Ubi praevia reductio per Aequationis Affectus resolutionem requiritur.

Si Curva per Aequationem $z^3 + a^2z + aax - 2a^3 - x^3 = 0$ definatur, extrahe radicem, et proveniet $z = a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} \&c.$ Unde, ut in prioribus obtinebitur $z = aa - \frac{xx}{192a} + \frac{x^3}{2048a^2} \&c.$

Sino

Sin $z^3 - cz^2 - 2x^2z - c^2z + 2cx^3 + c^3 = 0$ Sit Aequatio ad Curvam resolutio
dabit triplicem radicem nempe $z = c + x - \frac{xx}{4c} + \frac{x^3}{32c^2}$ &c. Et $z = c - x + \frac{3x^2}{4c} - \frac{15x^3}{32cc}$ &c. Et $z = -c - \frac{x^3}{2c} - \frac{x^3}{2cc} + \frac{x^5}{4c^2}$ &c. Et inde trium correspondentium
Aream Valores $z = cx + \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^3}{12c} + \frac{x^5}{120c^2}$ &c.

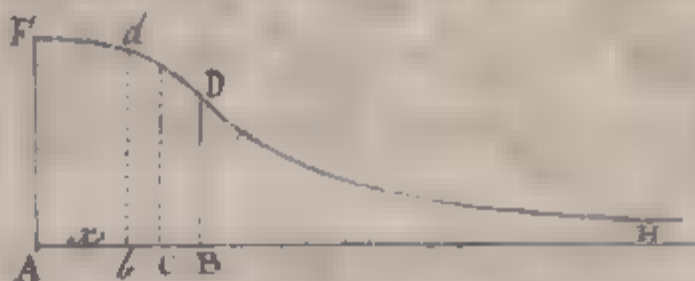
$$z = cx - \frac{1}{2}x + \frac{x^3}{4c} - \frac{15x^4}{120c^2}$$
 &c.

$$\text{ac } z = -cx - \frac{x^3}{6c} - \frac{x^3}{8c^2} + \frac{x^5}{24c^4}$$
 &c.

De Curvis Mechanicis hic nihil adjecio, siquidem reductio
ad formam Geometricarum post ostendetur.

Craterum cum sic inventi valores z Areae quandoq; ad Basis fini-
tam partem AB, quandoq; ad partem BH infinite versus H productam et
quandoq; ad utraq; partem sitis secundum diverfos eorum terminos compe-
tant: quo debitas Areae ad quamlibet Basis positionem sita valor assignatur
Area illa semper ponenda est aequalis differentia valorum z partibus Ba-
sis ad initium et finem istius Areae terminatis computatum.

E. G. Ad Curvam quam Aequatio $1 + xx = z$ definit inventum est
 $z = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$ &c. Nam ut quan-
titatem Areae bd DB adjacentis parti
Basis bB determinem a valore z qui
fit ponendo Ab = x , et distinctionis gra-
tia scripta X majusculâ pro AB & x
minusculâ pro Ab) restat $X - \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{5}X^5$
 X^5 &c. $-x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5$ &c, valor Areae illius bd DB. Unde si Ab seu x ponatur
nullum, habebitur tota Area AFDB = $X - \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{5}X^5$ &c.

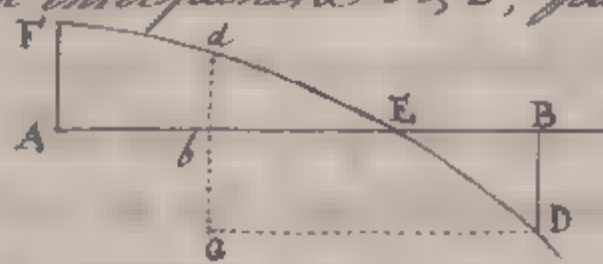


Ad eandem Curvam inventum est etiam $z = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5}$ &c unde
rursus juxta precedentia erit Area illa bd DB = $\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5}$ &c. $-\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5}$
 $-\frac{1}{3x^5}$ &c. Adeoq; si AB seu X statueretur infinitum, Area adjacens bd H
a parte H similiter infinite longa valebit $\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5}$ &c. Siquidem
posterior Series $-\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5}$ &c. propter infinitatem denominatorum
evanescat.

Ad Curvam Aequatione $a + \frac{a^3}{xx} = z$ designatam, inventum est $ax - \frac{a^2}{x}$
 $= z$. Unde fit $aX - \frac{a^2}{X} - ax + \frac{a^2}{x} = \text{Area bd DB}$. Haec autem evadit infi-
nita sive x fingatur nulla sive X infinita et proinde utraq; Area AFDB
et bd H infinite magna est, ac solae partes intermediae (qualis bd DB)
exhiberi possunt. Id quod semper evenit ubi Basis x cum in Numerato-
ribus aliquorum tum in Denominatoribus aliorum terminorum valoris
 z reperitur. Ubi vero x in Numeratoribus solummodo, ut in primo
Exemplo, reperitur; valor z competit Areae sitae ad AB ut paralleli in-
cedentem. Et ubi in Denominatoribus tantum, ut in secundo Exemplo;
valor ille mutatis omnium terminorum signis, competit Areae omni ultra
paralleli incedentem infinite productae.

Siquando

Si quando Curva linea secat Basim inter puncta b & B , puta in E , vice Areas habebitur Area-
rum ad diversas Basis partes,
differentia bd $E - BDE$. Cui si ad-
datur rectangulum $BDGb$ obtinebitur Area $dEDG$.



Præcipue autem notandum est quod ubi in valore z terminus aliquis
per x unius tantum dimensionis dividitur, Area illi termino correspondens
pertinet ad Hyperbolam Conicam, et proinde per infinitam Seriem seorsim
exhibenda est: quemadmodum in sequentibus factum.

Sit $\frac{a^2 - a^2 x}{ax + xa} = z$. Aequatio ad Curvam, et per divisionem, fiet $z = \frac{aa}{x}$
 $- 2a + 2a - \frac{2ax^2}{a} + \frac{2ax^3}{a^2}$ &c. Indeg, $z = \left[\frac{aa}{x}\right] - 2aax + xa - \frac{2ax^3}{3a} + \frac{2ax^4}{2aa}$ &c. Et
Area bd $DB = \left[\frac{aa}{x}\right] - 2aX + X^2 - \frac{2X^3}{3a}$ &c. $= \left[\frac{aa}{x}\right] + 2aax - xa + \frac{2ax^3}{3a}$ &c. Ubi per
notas $\left[\frac{aa}{x}\right]$ & $\left[\frac{aa}{x}\right]$ designo Areas terminis $\frac{aa}{x}$ & $\frac{aa}{x}$ competentes.

Nam ut $\left[\frac{aa}{x}\right] - \frac{aa}{x}$ investigetur; fingo Ab seu x definitam esse, et bB
indefinitam seu fluentem Lineam, quam itaq; si dicam y , erit $\left[\frac{aa}{x+y}\right] =$ Area
istius Hyperbolicae adjacenti bB nempe $\left[\frac{aa}{x}\right] - \left[\frac{aa}{x}\right]$. Est autem, facta divisi-
one $\frac{aa}{x+y} = \frac{aa}{x} - \frac{aay}{x^2} + \frac{aay^2}{x^3} - \frac{aay^3}{x^4}$ &c. Adeoque $\left[\frac{aa}{x+y}\right]$ seu $\left[\frac{aa}{x}\right] - \left[\frac{aa}{x}\right] =$
 $-\frac{aay}{x^2} + \frac{aay^2}{3x^3} - \frac{aay^3}{4x^4}$ &c. Et proinde tota Area quaesita bd $DB = \frac{a^2 y}{x^2} -$
 $\frac{a^2 y^2}{2x^3} + \frac{a^2 y^3}{3x^4}$ &c. $- 2aX + X^2 - \frac{2X^3}{3a}$ &c. $+ 2aax - xa + \frac{2ax^3}{3a}$ &c.

Ad eundem modum AB seu X pro definita linea adhiberi potuit
et sic prodisset $\left[\frac{aa}{x}\right] - \left[\frac{aa}{x}\right] = \frac{a^2 y}{x^2} + \frac{a^2 y^2}{2x^3} + \frac{a^2 y^3}{3x^4} + \frac{a^2 y^4}{4x^5}$ &c.

Quinetiam si bisecetur bB in C , et assumatur AC esse definita
Longitudinis, et Cb ac CB indefinitae. Tum dicto $AC = \varepsilon$, & Cb vel
 $CB = y$ erit $bd = \frac{aa}{\varepsilon - y} = \frac{aa}{\varepsilon} + \frac{a^2 y}{\varepsilon^2} + \frac{a^2 y^2}{\varepsilon^3} + \frac{a^2 y^3}{\varepsilon^4} + \frac{a^2 y^4}{\varepsilon^5}$ &c. indeq; Area
Hyperbolica parti Basis bC adjacentis $\frac{a^2 y}{\varepsilon} + \frac{a^2 y^2}{2\varepsilon^2} + \frac{a^2 y^3}{3\varepsilon^3} + \frac{a^2 y^4}{4\varepsilon^4}$ &c.
Erit etiam $DB = \frac{aa}{\varepsilon + y} = \frac{aa}{\varepsilon} - \frac{a^2 y}{\varepsilon^2} + \frac{a^2 y^2}{\varepsilon^3} - \frac{a^2 y^3}{\varepsilon^4} + \frac{a^2 y^4}{\varepsilon^5}$ &c. Et inde Area alteri
Basis parti CB adjacentis $\frac{a^2 y}{\varepsilon} - \frac{a^2 y^2}{2\varepsilon^2} + \frac{a^2 y^3}{3\varepsilon^3} - \frac{a^2 y^4}{4\varepsilon^4} + \frac{a^2 y^5}{5\varepsilon^5}$ &c. Et harum
Arearum Summa $\frac{2a^2 y}{\varepsilon} + \frac{2a^2 y^3}{3\varepsilon^3} + \frac{2a^2 y^5}{5\varepsilon^5}$ &c. valebit $\left[\frac{aa}{x}\right] - \left[\frac{aa}{x}\right]$.

Sic Aequatione $z^3 + z^2 + z - x^3 = 0$ ad Curvam existente, ejus
Radix erit $z = x - \frac{1}{3} - \frac{2}{9x} + \frac{7}{54xx} + \frac{5}{54x^3}$ &c. Unde sit $z = \frac{1}{2} xa$
 $- \frac{1}{3} x - \left[\frac{2}{9x}\right] - \frac{7}{54x} - \frac{5}{162xx}$ &c. Et Area bd $DB = \frac{1}{2} X^2 - \frac{1}{3} X -$
 $\left[\frac{2}{9x}\right] - \frac{7}{54x}$ &c. $- \frac{1}{2} xa + \frac{1}{3} x + \left[\frac{2}{9x}\right] + \frac{7}{54x}$ &c. hoc est $= \frac{1}{2} X^2 - \frac{1}{3} X - \frac{7}{54x}$
&c. $= \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x + \frac{7}{54x}$ &c. $= \frac{4x}{9\varepsilon} - \frac{4x^3}{27\varepsilon^3} - \frac{4x^5}{45\varepsilon^5}$ &c.

(Potest)

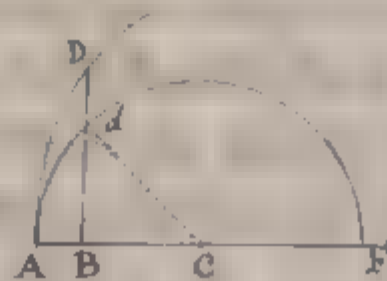
Potest autem terminus iste Hyperbolicus ut plucimum commodi devitari, mutando initium Basis, id est, augendo vel minuendo eam per datam aliquam quantitatem. Quomodo in exemplo priori ubi $\frac{a^3 - a^2x}{ax + x^2} = z$, erat Aequatio ad Hyperbolum; si faciam b esse initium Basis, et fingam Ab cujuslibet esse determinato Longitudinis puta $\frac{1}{2}a$, pro Basis, residuo bB jam scribam x : Hoc est, si diminuiam Basem per $\frac{1}{2}a$, scribendo $x + \frac{1}{2}a$ pro x , evadet $\frac{\frac{1}{2}a^3 - a^2x}{\frac{1}{2}a^2 + 2ax + x^2} = z$ et per divisionem $z = \frac{2}{3}a - \frac{2}{9}x + \frac{200x^2}{27a} &c$, unde fit $z = \frac{2}{3}a - \frac{2}{9}x + \frac{200x^2}{27a} &c = \text{Area } b d DB$.

Et sic pro initio Basis adhibendo aliud atq; aliud ejus punctum, potest Area cujusvis Curvae modis infinitis exprimi.

Potuit etiam Aequatio $\frac{a^3 - a^2x}{ax + x^2} = z$, in duas Series infinitas resolveri prode, unde $z = \frac{a^3}{x^2} - \frac{a^4}{x^3} + \frac{a^5}{x^4} &c. - a + x - \frac{ax^2}{x^2} + \frac{x^3}{x^2} &c$, ubi terminus per x unius tantum dimensionis divisus non reperitur. Sed hujusmodi Series, ubi dimensiones x in unius Numeratoribus & alterius Denominatoribus infiniti ascendunt, minus apte sunt ex quibus z per computum Arithmeticum obtineri possit, cum in ejus valore numeri pro speciebus substituuntur.

Instituendi computum hujusmodi numerosum postquam valor Areae in speciebus habetur, haud aliquod difficile occurrit. Tamen in praecedentem doctrinam penitus illustrandam Exemplum unum & alterum subungere placuit.

Proponatur Hyperbola AD quam Aequatio $\sqrt{x + ax} = z$ designat, utpote cujus vertex est ad A, et utroq; Axis aequatur unitati. Et e praecedentibus Area ejus ADB erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{72}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{9}{2}} &c$. hoc est, $x^{\frac{3}{2}}$ in $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{704}x^5 &c$. Quae Series infinite producitur multiplicando ultimum terminum continuo per succedaneos terminos hujus Progressionis $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2} &c$. Namque primus terminus $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$ facit $\frac{1}{3}x^2$, secundum terminum. Aic in $-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}$ facit $-\frac{1}{10}x^3$ tertium terminum. Aic in $-\frac{5}{704}x^{\frac{9}{2}}$ facit $-\frac{5}{704}x^5$ quantum terminum, Et sic in infinitum. Sumatur jam AB cujuslibet Longitudinis puta $\frac{1}{4}$, et hunc numerum scribe pro x , ejusq; radicem $\frac{1}{2}$, pro $x^{\frac{1}{2}}$ et primus terminus $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ sive $\frac{2}{3} \times \frac{1}{8}$ in Decimalem Fractionem reductus erit 0,08333333 &c. Aic in $\frac{1}{10}x^3$ facit 0,00625 secundum terminum. Aic in $-\frac{5}{704}x^5$ facit - 0,0002790170 &c tertium terminum. Et sic in infinitum. Terminos autem quos sic gradatione elicio dispono in duas Tabulas Affirmativos nempe in unam, et Negativos in aliam, et addo, ut hic vides.



+	0,0833333333333333
	6250000000000000
	271267361111
	5135169396
	144620917
	4954501
	190940
	7963
	352
	1
+	0,0096109005646510

-	0,0002790170571429
	34679066051
	834465027
	26205354
	961296
	38676
	1663
	75
	4
-	0,0002825719309575
+	0,0096109005646510
	0,0093284168237043

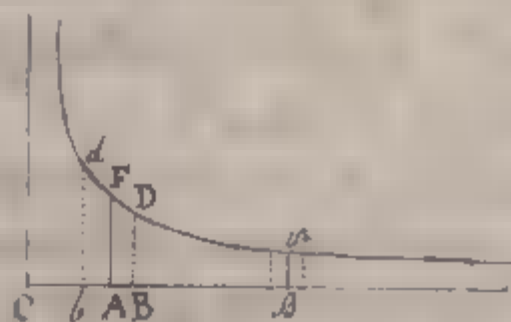
Dein a Summa affirmativum aufero summam negativum, et restat
 0,0893204166257043 Quantitas Area Hyperbolica ADB quam quaerere oportuit.

Proponatur jam Circulus AdF, quem Aequatio $\sqrt{x} - x = \frac{1}{2}$ designat, hoc
 est cujus Diameter AF sit unitas, et e precedentibus Area ejus AdB erit
 $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{42}x^{\frac{9}{2}} \&c$. In qua Series cum termini non differant
 a terminis Series supra exprimentis Area Hyperbolicam nisi in signis
 + - nihil aliud agendum restat quam ut eodem Numerales terminos
 cum alijs signis nectamus, subducendo nempe connexas amborum prefata-
 rum Tabularum summas 0,0890935605036193 a primo termino duplicata
 0,1666666666666666 et residuum 0,0767731061630473 erit Area Circularis
 portio AdB, posito scilicet AB quadrante Diametri. Atq; ita videtur est quod
 etsi Area Circuli et Hyperbola non conferantur ratione Geometrica, tamen
 utraq; eodem computo Arithmetico prodit.

Inventa Circuli portione AdB, eadem tota Area facilius eruitur. Nemp
 radio dC acto duc Bd seu $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ in BC seu $\frac{1}{2}$ et facti dimidium $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ seu
 0,0561265077365275 valebit triangulum CdB, quod addo Area AdB et habe-
 bitur Sector ACd = 0,1300996930995747, cujus Sexuplum 0,7805998163974482
 est Area tota.

Et hinc obiter erit Peripheria Longitudo 3,1415926535097920, divi-
 dendo nempe Area per Quadrantem Diametri.

Hicce calculum Area inter Hyperbolam dFD et ejus Asymptoton
 CA intercepta subnectimus. Sit C Centrum Hyperbolae, & posito CA = a,
 AF = b et AB = Ab = x; Erit $\frac{ab}{a+x} = BD$, & $\frac{ab}{a-x} =$
 $= bd$; et inde Area AFDB = $bx - \frac{bx^2}{2a} + \frac{bx^3}{3a^2}$
 $- \frac{bx^4}{4a^3} \&c$. Et Area AFdb = $bx + \frac{bx^2}{2a} + \frac{bx^3}{3a^2}$
 $+ \frac{bx^4}{4a^3} \&c$. Ac earum Summa bd DB = $2bx$
 $+ \frac{2bx^3}{3a^2} + \frac{2bx^5}{5a^4} + \frac{2bx^7}{7a^6} \&c$. Ponamus jam
 CA = AF = 1, et Ab vel AB = $\frac{1}{10}$ existente Cb = 0,9, & CB = 1,1; Et substi-
 tuendo hos Numeros pro a, b, & x, primas Series terminus evadet 0,2; secun-
 dus 0,00066666 &c. tertius 0,000004; & sic deinceps, ut vides in hac Tabula.



0,2000000000000000
 6666666666666666
 400000000000
 205714286
 22222222
 10102
 154

Summa 0,2006706954621511 = Area bd DB

Quod si Area hujus partes Ad & AD seorsim desiderantur subduc minorem DA e
 majiori dA, & restabit $\frac{bx^5}{5a^4} + \frac{bx^7}{7a^6} + \frac{bx^9}{9a^8} + \frac{bx^{11}}{11a^{10}} \&c$. ubi si 1 scribatur pro a & b
 hoc to pro x, termini in Decimalis redacti
 conficiunt sequentem Tabulam.

0,0100000000000000
 500000000000
 333333333333
 250000000
 200000
 10000
 14

Summa 0,0100503350535014 = Ad-AD

Tam si haec Areae differentia addatur et auferatur Summa earum prius inventae aggregati dimidium 0,1033605156570263 erit major Area Ad, et residui dimidium 0,0953101790043240 minor AD.

Per easdem Tabulas obtinentur etiam Areae illae AD & Ad, ubi AB & Ab ponuntur 100 sive CB = 1,01 & Cb = 0,99 se modo numeri in depressiora loca debite transferantur, ut hic vide est.

$$\begin{array}{r} 0,0200000000000000 \\ 6666666667 \\ 400000 \\ 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,0001000000000000 \\ 50000000 \\ 3333 \end{array}$$

$$\text{Sum. } 0,0200006667066695 = bD \quad \text{Sum. } 0,0001000050003333 = Ad - AD$$

$$\frac{1}{2} \text{ Aggreg. } 0,0100303358535014 = Ad. \quad \frac{1}{2} \text{ Resid. } 0,0099503308531681 = AD.$$

Et sic positis AB & Ab 1000 seu CB = 1,001, & Cb = 0,999 obtinebimus Ad = 0,0010005003335035, et AD = 0,0009995003330035.

Ad eundem modum si stantibus CA & AF = 1, ponantur AB & Ab = 0,2 vel = 0,02, vel = 0,002 elicientur Areae illae.

$$\begin{array}{ll} Ad = 0,2231435513142097 & \text{et } AD = 0,1823215567939546 \\ \text{vel } Ad = 0,0202027873175194 & \text{et } AD = 0,0198026272961797 \\ \text{vel } Ad = 0,002002 & \text{et } AD = 0,001 \end{array}$$

Ex inventis hinc Areae jam facile est alias per solam Additionem et subductionem derivare. Ut pote cum sit $\frac{1}{0,8}$ in $\frac{1}{0,9} = 2$ Areae pertinentium ad rationes $\frac{1}{0,8}$ & $\frac{1}{0,9}$ hoc est insistentium partibus Basis 1,2 = 0,8, & 1,2 = 0,9) Summa 0,6931471005399453 erit Area AFDB, existente CB = 2 ut notum est. Dein cum sit $\frac{1}{0,8}$ in 2 = 3. Areae pertinentium ad $\frac{1}{0,8}$ & 2 Summa 1,0906122006681097 erit Area AFDB existente CB = 3. Pariter cum sit $\frac{2}{0,8} = 5$, et 2 in 5 = 10, per debitam Areae Additionem obtinebimus 1,6093379126341004 = AFDB, existente CB = 5, et 2,3025850929940437 = AFDB existente CB = 10. Atq; ita cum sit 10 in 10 = 100, et 10 in 100 = 1000, et $\sqrt{5}$ in 10 in 0,98 = 7, et 10 in 1,1 = 11, et $\frac{1000 \times 1,001}{7 \times 11} = 13$, et $\frac{100 \times 1,02}{2 \times 3} = 17$, et $\frac{1000 \times 0,999}{3 \times 3 \times 3} = 37$, & 100 = 1,01 = 101, et $\frac{1000 \times 1,002}{2 \times 3} = 167$, et $\frac{1000 \times 0,998}{2} = 499$, patet Areae AFDB per Areae supra inventarum compositionem inveniri posse, existente CB = 100; 1000, 7; aut alio quolibet & recensitis numeris, et stante AB = BF = 1. Id quod significare volui ut Methodus construendo Logarithmorum Canonis aptissima pateret quae Areae Hyperbolicas (ex quibus Logarithmi facile deducuntur) tot numeris primis correspondentes, quasi per binas tantum haud molestas operationes determinat. Ceterum cum Canon istec hoc forte praeceteris feliciter deprimi videatur, quid si Constructionem ejus corrodendis loco perstringam.

Imprimis itaq; assumpto 0 pro Logarithmo Numeri 1, et 1 pro Logarithmo Numeri 10, ut solet, investigandi sunt Logarithmi primorum Numerorum 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 37. dividendo inventas Areae Hyperbolicas per 2,3025850929940457 Areae nempe correspondentem Numero 10, vel quod eodem recidit, multiplicando per ejus reciprocum 0,4342944819032518. Sic enim e.g. si 0,69314710 &c. Area correspondens Numero 2 multiplicetur

per

per 0,43429 &c. facit 0,3010299956639012 Logarithmum Numeri 2.

Deinde Logarithmi Numerorum omnium in Canone qui ex horum Multiplicatione fiunt indagandi sunt per Additionem eorum Logarithmorum, ut solet, et loca vacua postmodum interpolanda, operis hujus Theorematis.

Sit N Numerus Logarithmo donandus, & differentia inter illum et proximos Numeros hinc inde equaliter distantes quorum Logarithmi habentur, ac d semipsis differentie Logarithmorum, et quaeritus Logarithmus Numeri N obtinebitur addendo $d + \frac{dx}{2n} + \frac{dx^3}{12n^3}$ &c. Logarithmo minoris Numeri. Nam si Numeri exponantur per CP , CB & EP : et existente rectangulo CBD vel $CBP = 1$, ut supra, ac erectis parallelis intercedentibus pq & PQ . Si N scribatur pro CB et x pro Bp vel BP , erit Area $pqQP$ sive $\frac{2x}{n} + \frac{2x^3}{3n^3} + \frac{2x^5}{5n^5}$ &c. ad Aream $pqPB$ sive $\frac{x}{n} + \frac{x^3}{3n^3} + \frac{x^5}{5n^5}$ &c. ut differentia inter Logarithmos extremorum numerorum sive $2d$, ad differentiam inter Logarithmos minoris et medij, quae proinde erit $\frac{dx}{n} + \frac{dx^3}{2n^3} + \frac{dx^5}{3n^5}$ &c. hoc est facta Divisione $d + \frac{dx}{2n} + \frac{dx^3}{12n^3}$ &c.

Hujus autem Series duos primos terminos $d + \frac{dx}{2n}$ pro Canone construendo sat accuratas existimo chamsi ad usq. quatuordecim vel forte quindecim figurarum loca Logarithmi producerentur, si modo Numerus Logarithmo donandus non sit minor quam 1000. Quod sane calculum haud difficilem praebere potest siquidem x ut plerumque erit unitas vel Numerus binarius. Non opus est tamen omnia loca beneficio hujus Regulae interpolare. Nam Logarithmi Numerorum qui prodeunt e Multiplicatione vel Divisione Numeri novissime transacti per Numeros quorum Logarithmi prius habebuntur obtineri possunt per Additionem vel Subductionem eorum Logarithmorum.

Quinetiam per differentias Logarithmorum et illarum differentiarum secundas differentias tertiasq. si opus est, loca vacua expeditius impleri possunt, adhibita tantum praedicta Regula ubi ad obtinendum illas differentias continuatio aliquot locorum plenorum desideratur.

Eadem Methodo Regulae pro intercalatione Logarithmorum inveniri possunt ubi e tribus Numeris dantur Logarithmi minoris & medij, vel medij et majoris, idq. licet Numeri non sint in Arithmetica Progressione.

Imò et hujus Methodi vestigijs insistendo Regula pro construendis Artificialium Sinuum et Tangentium Tabulis sine adminiculo naturalium haud difficulter deprimi possunt. Sed haec in transitu.

Hactenus

Hactenus Curvarum quae per Aequationes minus Simples definiuntur Quadraturam mediante reductiones in Aequationes ex infinite multis terminis simplicibus constantes ostendimus. Cum vero ejusmodi Curvae per finitas etiam Aequationes nonnunquam quadrari possint vel saltem comparari cum alijs Curvis quarum Area quodammodo pro cognitis habeantur, quales sunt Sectiones Conicae: Expropter sequentes duos Theorematum Catalogos illum usum ope Propositionis 7^a et 8^a, ut promissimus constructos, jam visum est adungere.

Horum prior exhibet Areas Curvarum quae quadrari possunt; et posterior complectitur Curvas quarum Areas cum Area Conicarum Sectionum conferre liceat. In utroque litterae Latinae d, e, f, g & h, datae quarum Quantitates, x & z, Bases Curvarum, v & y paralleli incidentes, et s ac t Areas ut supra denotant. Graecae autem γ & θ quantitati z sufficiens, denotant, ejusdem z dimensionum numerum sive sit Integer vel Fractus, sive Affirmativus aut Negativus. Veluti si sit $\gamma = 3$ erit $z^4 = z^3$, $z^{2\gamma} = z^6$, $z^{-\gamma} = z^{-3}$ sive $\frac{1}{z^3}$, $z^{\gamma+1} = z^4$ & $z^{\gamma-1} = z^2$.

Insuper in valoribus Areae abbreviandi causa scribitur R vice radicalis illius $\sqrt{e+fz^\gamma}$ vel $\sqrt{e+fz^\gamma+gz^{2\gamma}}$, quae valor incidentis γ afficitur.

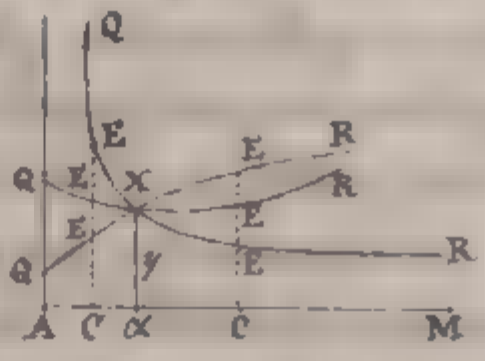
Catalogus Curvarum aliquot ad Rectilineas Figuras relatarum ope Prob. 7 constructos.

	Curvarum Ordo.	Areae Valores.
I	$dz^{4-1} = \gamma.$	$\frac{d}{4} z^4 = t.$
II	$\frac{dz^{4-1}}{ee+2efz^\gamma+ffz^{2\gamma}} = \gamma.$	$\frac{dz^\gamma}{ne^2+nefz^\gamma} = t.$ vel $\frac{d}{4ef+4ffz^\gamma} = t.$
III	1 $dz^{4-1}\sqrt{e+fz^\gamma} = \gamma.$	$\frac{2d}{25f} R^3 = t.$
	2 $dz^{2\gamma-1}\sqrt{e+fz^\gamma} = \gamma.$	$\frac{-4e+6fz^\gamma}{154f^2} dR^3 = t.$
	3 $dz^{3\gamma-1}\sqrt{e+fz^\gamma} = \gamma.$	$\frac{16e^2-24efz^\gamma+30f^2z^{2\gamma}}{1054f^3} dR^3 = t.$
	4 $dz^{4\gamma-1}\sqrt{e+fz^\gamma} = \gamma.$	$\frac{-96e^3+144e^2fz^\gamma-180ef^2z^{2\gamma}+210f^3z^{3\gamma}}{9454f^4} dR^3 = t.$
IV	1 $\frac{dz^{4-1}}{\sqrt{e+fz^\gamma}} = \gamma.$	$\frac{2d}{4f} R = t.$
	2 $\frac{dz^{2\gamma-1}}{\sqrt{e+fz^\gamma}} = \gamma.$	$\frac{-4e+2fz^\gamma}{34f^2} dR = t.$
	3 $\frac{dz^{3\gamma-1}}{\sqrt{e+fz^\gamma}} = \gamma.$	$\frac{16e^2-8efz^\gamma+6f^2z^{2\gamma}}{154f^3} dR = t.$
	4 $\frac{dz^{4\gamma-1}}{\sqrt{e+fz^\gamma}} = \gamma.$	$\frac{-96e^3+40e^2fz^\gamma-36ef^2z^{2\gamma}+30f^3z^{3\gamma}}{1054f^4} dR = t.$

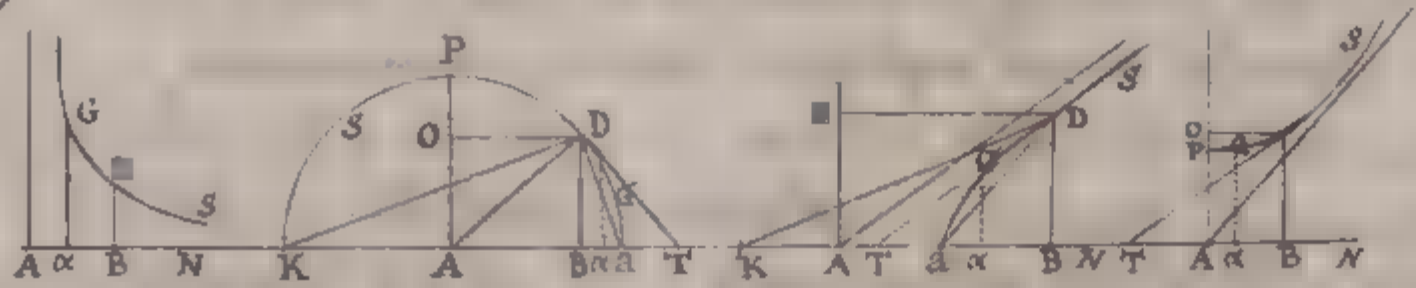
Hic adjiciantur sequentia magis generalia. Theoremata quibus
via ad altiora sternitur. Ponatur p pro $\sqrt{h+iz^4}$

V	1	$\frac{20ez^{0-1} + 20fz^{0+4-1}}{+34f} \times \frac{1}{2}\sqrt{e+fz^4}$	$= y,$	$z^0 R^3$	$= t.$
	2	$\frac{20ez^{0-1} + 20fz^{0+4-1} + 20gz^{0+24-1}}{+34f + 64g} \text{ in } \frac{1}{2}\sqrt{e+fz^4+gz^2}$	$= y,$	$z^0 R^3$	$= t.$
VI	1	$\frac{20ez^{0-1} + 20+4 \times fz^{0+4-1}}{2\sqrt{e+fz^4}}$	$= y,$	$z^0 R$	$= t.$
	2	$\frac{20ez^{0-1} + 20+4 \times fz^{0+4-1} + 20+24 \times gz^{0+24-1}}{2\sqrt{e+fz^4+gz^{24}}}$	$= y,$	$z^0 R$	$= t.$
VII	1	$\frac{20ez^{0-1} + 20-4 \times fz^{0+4-1}}{e+fz^4 \text{ in } 2\sqrt{e+fz^4}}$	$= y,$	$\frac{z^0}{R}$	$= t.$
	2	$\frac{20ez^{0-1} + 20-24 \times fz^{0+4-1} + 20-24 \times gz^{0+24-1}}{e+fz^4+gz^{24} \text{ in } 2\sqrt{e+fz^4+gz^{24}}}$	$= y,$	$\frac{z^0}{R}$	$= t.$
VIII	1	$\frac{20ez^{0-1} + 20-24 \times fz^{0+4-1}}{ee+2efz^4+f^2z^{24}}$	$= 2y,$	$\frac{z^0}{R^2} (\text{sive } \frac{z^0}{e+fz^4})$	$= t.$
	2	$\frac{20ez^{0-1} + 20-24 \times fz^{0+4-1} + 20-44 \times gz^{0+24-1}}{e^2+2efz^4+f^2+2egxz^{24}+2fgz^{34}+ggz^{44}}$	$= 2y,$	$\frac{z^0}{R^2} (\text{sive } \frac{z^0}{e+fz^4+gz^{24}})$	$= t.$
IX		$\frac{20ehz^{0-1} + 20+34 \times fhxz^{0+4-1} + 20+44 \times fiZ^{0+24-1}}{+2g+n \times ei} \text{ in } \frac{\sqrt{e+fz^4}}{2\sqrt{h+iz^4}}$	$= y,$	$z^0 R^3/p$	$= t.$
X		$\frac{20ehz^{0-1} + 20+34 \times fhxz^{0+4-1} + 20+44 \times fiZ^{0+24-1}}{h+iz^4 \text{ in } 2\sqrt{h+iz^4}}$	$= y,$	$\frac{z^0 R^3}{p}$	$= t.$

Possint et huiusmodi alia adjici, sed ad alterius generis Curvas qua cum Conicis Sectionibus conferri possunt jam transeo. Et in hoc Catalogo expressit Curvam lineam QEXR de: signatam habes cujus Basis principium sit A, Basis AC parallela incidens CE, Area principium αx , et Area descripta αxec . Eius autem Area principium sive terminus initialis (quod ut plurimum vel Basis principio A insistit, vel ad infinitam distantiam recedit) invenitur querendo Basis longitudinem αx cum Area valor nullus est, et erigendo normalem αx .



Ad eundem modum Conicam Sectionem habes designatam Linea PDG, cujus Centrum sit A, vertex a, Rectangula Semidiametri Aa & AP, Basis principium A vel a, vel α , Basis AB, vel aB, vel αB , Ordinatim Appli-



cata BD, Tangens DT, occurrat AB in T, subtensa aD, et inscriptum vel ascriptum rectangulum ABDO.

Nag retentis jam ante definitis literis, erit $AC = z$, $CE = y$, $\alpha xec = t$ AB vel aB = x , BD = v , $\& ABDP$, $\& aGDB = s$. Et praeterea si quando ad alicujus Areas determinationem duae conicae Sectiones requiruntur posterioris Area dicetur σ , Basis ξ , et parallela incidens τ .

Catalogus Curvarum aliquot ad Conicas Sectiones relatarum ope Prob: 8 constructus.

Curvar. form.	Sectionis Conicae Abscissae. Ordinatis.	Arearum valores.
I 1 $\frac{dx^{4-1}}{e+fx^4} = y$	$z^4 = x \cdot \frac{d}{e+fx} = v$	$\frac{1}{4}S = t = \frac{\alpha GDB}{4}$
I 2 $\frac{dx^{24-1}}{e+fx^4} = y$	$z^4 = x \cdot \frac{d}{e+fx} = v$	$\frac{d}{4f} z^4 - \frac{e}{4f} S = t$
I 3 $\frac{dx^{34-1}}{e+fx^4} = y$	$z^4 = x \cdot \frac{d}{e+fx} = v$	$\frac{d}{24f} z^4 - \frac{de}{4f^2} z^4 + \frac{ee}{4f^2} S = t$
II 1 $\frac{dx^{\frac{1}{2}4-1}}{e+fx^4} = y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fx^4}} = x \cdot \sqrt{\frac{d}{f} - \frac{e}{f}x^2} = v$	$\frac{2xv}{4} + \frac{4S}{4} = t = \frac{1}{4} ADGB$
II 2 $\frac{dx^{\frac{3}{2}4-1}}{e+fx^4} = y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fx^4}} = x \cdot \sqrt{\frac{d}{f} - \frac{e}{f}x^2} = v$	$\frac{2de}{4f} z^{\frac{1}{2}4} + \frac{4ev}{4f} - \frac{2exv}{4f} = t$
II 3 $\frac{dx^{\frac{5}{2}4-1}}{e+fx^4} = y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fx^4}} = x \cdot \sqrt{\frac{d}{f} - \frac{e}{f}x^2} = v$	$\frac{2de}{34f} z^{\frac{5}{2}4} - \frac{2de^2}{4f^2} z^{\frac{5}{2}4} + \frac{2e^2xv}{4f^2} - \frac{4e^2S}{4f^2} = t$

Antequam Theoremata in his Curvarum Classibus tradita Exem-
plis illustrare pergam, juvabit observare.

1. Quod cum quantitatibus d, e, f, g, h & i , signa omnia in Aequationibus
Curvas definientibus Affirmativa profuerim, signando contingant esse
negativa in subsequentibus Basis & incidentis linea Sectionis Conicæ,
nec quævis Area valoribus mutari debent.

2. Numeralium y & z ubi negativa sunt, signa in Aream valoribus
mutanda. Quoniam ipsarum signis mutatis Theoremata novam
formam inducere possunt. Sic in quarto forma posterioris Catalogi Theo-
rema tertium, signo ipsius y mutato, dedit $\frac{dx^{34-1}}{e+fx^4} = y, \frac{1}{z^4} = x, \frac{1}{z^4} = x, \frac{1}{z^4} = x$,
hoc est $\frac{dx^{34-1}}{\sqrt{ex^{24}+fx^4}} = y, z^4 = x, \sqrt{fx+ex^2} = v, \frac{d}{v^2}$ in $200v-33=t$. Est sic
in alijs.

3. Cujusque ordinis (si secundum prioris Catalogi demas) Series utriusque
in infinitum continuari potest. Scilicet in Tertijs, Quartis Ordinis Series
priori Catalogi, numeri coefficientes initialium terminorum (2, -4, 16, -96, 864, &c.)
generantur multiplicando numeros -2, -4, -6, -8, -10 &c. in se continuò; et
subsequentium terminorum coefficientes ex initialibus in tertio Ordine deri-
vantur multiplicando gradatim per $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{7}{6}, -\frac{9}{8}$. Denominatorum vero
coefficientes (1, 3, 15, 105 &c.) ex ductu numerorum 1, 3, 5, 7, 9 &c. in se gra-
datim oriuntur.

In secundo autem Catalogo Series Ordinum 1, 2, 3, 4, 9 & 10 ope solius
Divisionis in infinitum producantur. Sic habito $\frac{dx^{44-1}}{e+fx^4} = y$, si divisionem
ad usq. convenientem periodum instituas, orietur e.g. $\frac{dx^{34-1}}{f} = \frac{dx^{24-1}}{f^2} + \frac{de^2}{f^3}$
 $z^{4-1} - \frac{de^2}{f^3} z^{4-1} = y$. Priores tres termini sunt primi Ordinis prioris Cata-
logi et quartus primæ Speciei hujus Ordinis. Unde constat Aream valere
 $\frac{d}{34f} z^{34} - \frac{de}{24f^2} z^{24} + \frac{de^2}{4f^3} z^4 - \frac{e^3}{4f^3} S$; posita nempe S Area Sectionis Conicæ
cujus Basis x sit $= z^4$, et incidentis Applicata $v = \frac{d}{e+fx}$.

Quinti autem Sextis Ordinis Series ope duorum Theorematum in Quinto
Ordine prioris Catalogi per debitam Additionem vel Subductionem in infinitum
producantur, ut et septimi octavis Series ope Theorematum in subsequenti sexto
Ordine; ac undecimi Series ope Theorematis in decimo Ordine ejusdem prioris
Catalogi. E.g. Si prefati quinti Ordinis Series ultra producenda sit; finge
 $0 = -44, \frac{1}{2}$ quinti Ordinis alterius Catalogi Theorema primum evadet
 $-84ez^{-44-1} - 54fz^{-34-1}$ in $\frac{1}{2}\sqrt{e+fx^4} = y, \frac{B^3}{z^{44}} = t$.

Est autem juxta quantum Theorema hujus producenda Series (scripto $-\frac{54f}{2}$
pro d) $-\frac{54f}{2} z^{34-1} \sqrt{e+fx^4} = y, \frac{1}{z^4} = x, \sqrt{fx+ex^2} = v, \frac{10fv^3-15f^2S}{12e} = t$.
Quare subductis prioribus ipsarum y ac t valoribus restabunt $44ez^{-44-1}$
 $\sqrt{e+fx^4} = y, \frac{10fv^3-15f^2S}{12e} - \frac{R^3}{z^{44}} = t$. Ipsius in $\frac{d}{44e}$ ductis at pro $\frac{R^3}{z^{44}}$ scripto si placet
 xv^3 emerget quintum producenda Series Theorema $\frac{1}{244-1} \sqrt{e+fx^4} = y, \frac{1}{z^4} = x$,
 $\sqrt{fx+ex^2} = v, \frac{10fv^3-15f^2S}{404e^2} - \frac{dxx^3}{44e} = t$.

4. Horum Ordinum nonnulli ex alijs etiam possunt aliter derivari, utpote in posteriori Catalogo 5^{us}, 6^{us}, 7^{us}, 8^{us}, 11^{us}, ab 8^{vo}, ac 9^{no} a 10^{mo}. Adeo ut omisisse potuissem nisi quod usui esse possint, quamvis non proprius necessarius. Nonnullos tamen ordinis omisi quos a primo et secundo, nec non a nono decimoq; derivasse potuissem, utpote qui Denominatoribus magis commodis afficiuntur, et proinde vix ulli unquam usui esse possunt.

5. Si curva alicujus definientis Aequatio ex pluribus Aequationibus diversorum ordinum vel diversarum Specierum ejusdem Ordinis componatur, ejus Aream ac Areas correspondentes componere oportet; cavendo tamen ut Signis + & - recte connectantur. Nam paralleli incidentes paralleli incidentibus, & Areae correspondentes correspondentibus Areas non semper sunt simul addendae vel simul subducendae. Sed aliquando harum Summa et illarum differentia sumenda est pro nova linea incidente et Areae correspondente constituenda. Et hoc fieri debet cum constituentes Areae posita sunt ad diversam partem paralleli incidentis. Ut autem hoc incommodum cauti promptius devertire possint, singulis Areaarum valoribus propria Signa (etiam si nonnunquam Negativa, ut fit in posteriori Catalogi Quinto Septimoq; ordine) praefixi.

6. De Areaarum Signis observandum est praeterea quod + s vel denotat Aream Conicae Sectionis Basi adjacentem esse reliquis Quantitatibus in valore t addendam (vide Exempl: 1. sequ.) vel Aream ex altera parte Ordinationis applicata esse subducendam. Et contra - s autem denotat Aream Basi adjacentem esse subducendam vel Aream ex altera parte ordinationis applicata esse addendam: prout commodum videbitur. Deinde valor ipsius t si affirmativus prodierit, designat Aream Curvae propositae adjacentem Basi ejus. Et contra si fuerit Negativus, designat Aream ex altera parte ordinationis applicata.

7. Ceterum ut Area illa certius definiatur, prospiciendum est de Limitibus ejus. Et quidem limitum ad Basim, paralleli incidentem et Curvae perimetrum, nulla potest esse incertitudo: Sed limes initialis sive principium a quo incipit descriptio ejus varias positiones obtinet. In sequentibus Exemplis vel est ad initium Basis vel ad infinitam distantiam, vel in concursu Curvae cum Basi ejus. Sed potest alibi locari. Et ubicumq; sit, invenies quaecumque illam Basis Longitudinem ad quam valor ipsius t evadit nullus, et paralleli incidentem erigenti. Nam erecta illa linea erit limes quaesitus.

8. Si qua pars Areae infra Basim posita sit, t designabit differentiam ejus et partis supra Basim.

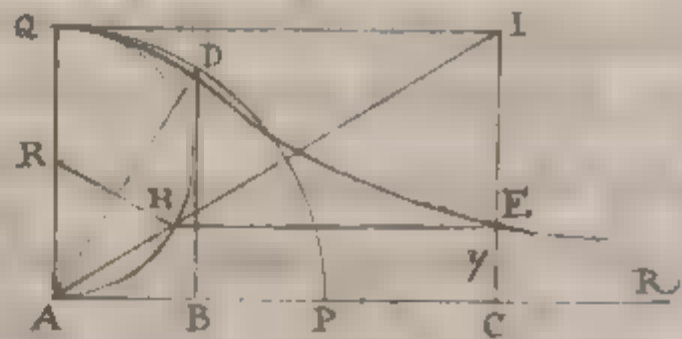
9. Si quando

9. Siquando Dimensiones terminorum in valoribus x , v & t nimis altae vel nimis depressae obveniunt, ad justum gradum liceat reducere dividendo vel multiplicando toties per datum quamvis quantitatem quae vices unitatis gerere fingitur, quoties Dimensiones illae sint justo altiores vel depressiores.

10. Praeter praecedentes Catalogos possunt etiam Catalogi Curvarum ad alias Curvas in suo genere simplicissimas (ut ad $\sqrt{e+fx^3} = v$, vel ad $x\sqrt{e+fx^3} = v$, vel ad $\sqrt{e+fx^4} = v$, &c.) relatorum construi, eo ut Curvae cujuscumque propositae Aream ex origine simplicissima possimus derivare et cum quibus Curvis affinitatem habeat cognoscere. Ceterum praecedentes tandem Exemplis aliquot illustremus.

Exempli: 1.

Sit QER ejusmodi Conchoidalis, ut semicirculo QHA descripto: et ad Diametrum AQ erecto AC perpendiculari. Si compleatur parallelogrammum QACI, agatur Diagonalis AI semicirculo occurrens in H, et ab H demittatur ad IC normalis HF, punctum E incidat in Curvam: Et quaeratur Area ACEQ.



Hic itaq; $AQ = a$, $AC = z$, $CE = y$ et propter continuas proportionales AI, AQ, AH, EC, erit EC sive $y = \frac{a^3}{a^2 + z^2}$.

Nam ut haec induat formam Aequationum in Catalogis, finge $y = 2$, & pro z^2 in Denominatore scribe z^4 ac $z^{\frac{3}{2}y-1}$ pro a^3 sive $a^3 z^{1-1}$ in Numeratore, et emerget $y = \frac{a^{3-\frac{1}{2}y-1}}{a^{\frac{3}{2}+z^4}}$. Aequatio primae Speciei secundae Ordinis posterioris Catalogi; collatisq; terminis, fiet $d = a^3$, $e = a^2$, & $f = 1$; Adeoque $\sqrt{\frac{a^3}{a^2+z^2}} = x$, $\sqrt{a^2 - x^2} = v$, & $xv - 2s = t$.

Ut autem inventi valores x & v , ad justum Dimensionum numerum reducantur selige datam quamlibet quantitatem velut a , per quam tanquam unitatem semel multiplicetur a^3 in valore x , et in valore v dividatur a^3 semel et $a^2 x^2$ bis. Et hoc pacto obtinebis $\sqrt{\frac{a^3}{a^2+z^2}} = x$, $\sqrt{a^2 - x^2} = v$, & $xv - 2s = t$. Quorum constructio est ejusmodi.

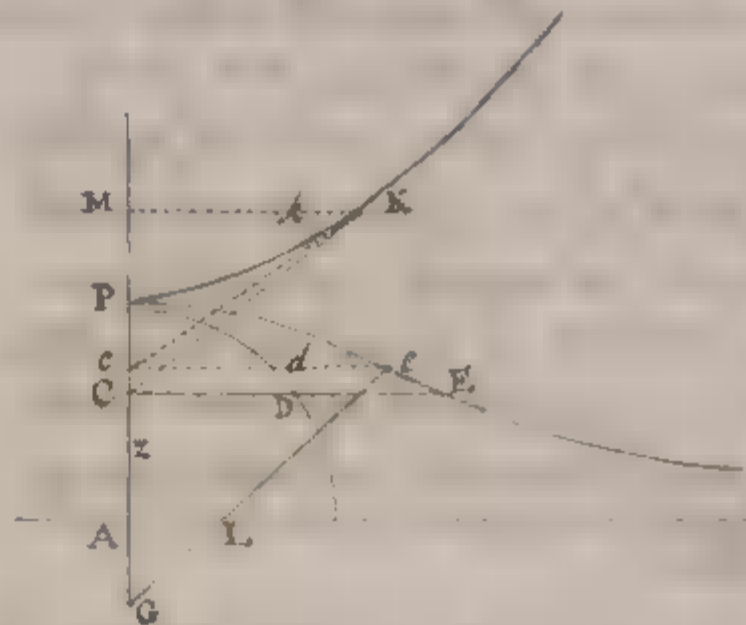
Centro A intervallo AQ describe Quadrantem Circuli QDP in AC cape AB = AH, erige normalem BD Quadranti occurrentem in D et age AD; Est Sectoris ADP duplum aequaliter Area quae sita ACEQ. Est enim $\sqrt{\frac{a^3}{a^2+z^2}} (= \sqrt{AQ \times EC} = HA) = AB$ sive x ; Et $\sqrt{a^2 - x^2} (= \sqrt{AD^2 - AB^2}) = BD$ sive v ; et $xv - 2s = 2\Delta ADB - 2ABDQ$, vel etiam $= 2\Delta ADB + 2BDP$, hoc est vel $= 2QAD$, vel $= 2DAP$: quorum valorum affirmativus 2DAP competit Area ACEQ citra EC, et Negativus 2QAD competit Area RECR ultra EC in infinitum protensa.

Solutiones

Exempli: 4.

Curva PE prima Conchoidea veterum, Centro G Asymptoto AL et inter-
vallo LE descripta. Age GAP Axin ejus, ac demitte EC Ordinationem App-
plicatam; Distingue AC = z, CE = y, GA = b, & AP = c; propter proportionem
AC:CE-AL::GC:CE, erit CE sive y = $\frac{b+z}{z} \sqrt{c^2-z^2}$.

Nam ut ejus Area PEC adhuc inveniat, partes applicatae CE seorsim
consideranda sunt. Et quidem si
illa CE dividatur in D ut sit CD =
 $\sqrt{c^2-z^2}$, ac DE = $\frac{b}{z} \sqrt{c^2-z^2}$, erit CD
Ordinationem Applicatam Circuli Centro
A intervallo AP descripti: Adeoque pars
Area PDC innotescet, et restabit
pars altera DPED invenienda.



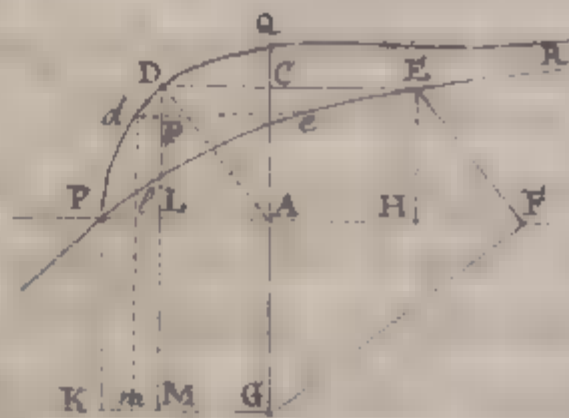
Cum itaq DE (pars Applicata
quarum describitur) valeat $\frac{b}{z} \sqrt{c^2-z^2}$;
suppone $z = y$, et evadet $\frac{b}{y} \sqrt{c^2-y^2}$ =
DE. Aequatio prima Speciei quinti
ordinis posterioris Catalogi. Collatisq terminis, fiet d = d, e = c², & f = -1; atq
adeo $\frac{1}{2} (= \sqrt{\frac{1}{2}}) = x$, $\sqrt{-1+c^2x^2} = v$, et $2bc^2s - \frac{bv^3}{c} = t$.

His inventis redige ad justum dimensionum numerum multiplicando
terminos nimis deprecos ac dividendo nimis altos per datum quamvis quan-
tatem. Id quod si fiat per c, prodibit $\frac{c^2}{z} = x$, $\sqrt{-c^2+x^2} = v$, & $\frac{2bs}{c} - \frac{bv^3}{cc} = t$. Et
horum Constructio est ejusmodi.

Centro A, vertice principali P, & Parametro 2AP, Hyperbolam PK describe.
Deinde a puncto C Age rectam CK qua tangat Hyperbolam in K: et erit
ut AP ad 2AG ita Area CKPC ad Area quae sitam DPED.

Exempli: 5.

Norma GFF. ita circa solum G rotante, ut ejus punctum Angulare
F super recta AF positione data continuo prolatabatur: Concipe Curvam
PE a puncto quolibet E in crure EF sito describi. Nam ut inveniat
hujus Area; demitte GA & EH ad rectam
AF perpendicularares, et completo paral-
lelogrammo AHED dic AC = z, CE = y, AC = b,
et EF = c; et propter proportionales HF:EH
::AG:AF, erit AF = $\frac{bz}{cc-zz}$. Adeoque CE sive
y = $\frac{bz}{\sqrt{cc-zz}} - \sqrt{c^2-z^2}$. Cum autem $\sqrt{cc-zz}$ sit
Ordinationem applicatam Circuli Semidiametro
c descripti: Circa Centrum A describetur talis
Circulus PDQ, eiq CD productus occurrat in D
et erit DE = $\frac{bz}{\sqrt{cc-zz}}$: Cujus Aequationis ope restat Area PDEP vel DERQ determinanda.



Supponantur ergo $y = z$, et evadet DE = $\frac{bz^2}{\sqrt{cc-zz}}$. Aequatio prima Speciei quarti Ordi-
nis prioris Catalogi. Et collatis terminis fiet b = d, cc = e, et -1 = f, adeoque
 $-b\sqrt{cc-zz} (= -bR) = t$.

Tam

Nam cum valor t negativus existat, et inde Area per t designata jaceat ultra lineam DE ; ut ejus limes initialis inveniatur quare illam ipsius z longitudinem qua t evadit nullas, et invenies esse C . Quare producat AC ad Q ut sit $AQ = c$, et erige Applicatam QR , et erit $DQRED$ Area illa cujus valor jam inventus est $-b\sqrt{c^2 - z^2}$.

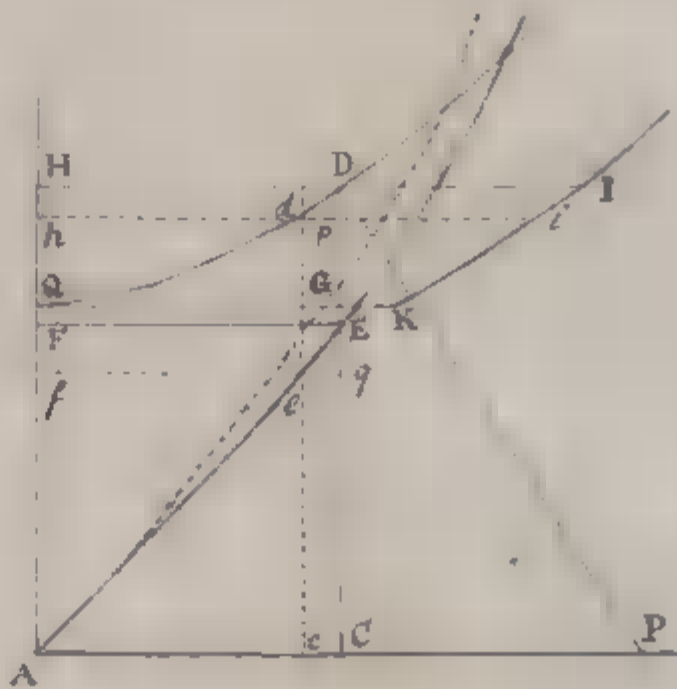
Quod si quantitatem Area PDE juxta Basim AC posita et cum ea coextensa desideres, propterea ignoto Limite QR sic determinares. A valore quem t ad Basim longitudinem AC sortita est subduc valorem ejus ad initium Basis; hoc est $a - b\sqrt{c^2 - z^2}$ subduc $-bc$ & proveniet quantitas $bc - b\sqrt{c^2 - z^2}$ quam quæris. Comple ergo parallelogrammum $PAGK$, et ad AP demitte Normalem DM qua cum GK occurrat in M et erit parallelogrammum $PMNK$ æquale Area PDE .

Si quando Equatio Curvam aliquam definientem non reperiatur in Catalogis, neq. ad simpliciores terminos ope Divisionis vel alio facto reduci possit: transformanda est in alias affinium Curvarum Equationes pro more in prob. 8 ostenso, donec tandem obtineat aliqua cujus Area ex Catalogis innotescat. Et conatibus omnimodo institutis, si nulla talis obveniat, certum est Curvam propositam neq. cum Figuris Rectilineis neq. cum Conicis Sectionibus comparari posse.

Ad eundem modum cum de Curvis Mechanicis agitur illæ imprimis transformanda sunt in æquales Geometricas prout in eodem prob. 8 ostensum fuit, ac deinde Geometricarum Area ex Catalogis elicienda. Cujus accipe sequens Exemplum.

Exempl. 6.

Proponatur Figura Arcuum cujusvis Conicæ Sectionis ad Sinus Rectos Applicatorum determinanda. Assupote sit A Centrum Conicæ Sectionis AQ & AR Semiaxes, CD Ordinatio applicata ad Axem AR , et PD perpendiculum ad punctum D . Sit etiam AE dicta Figura Mechanica occurrens CD in E et ex natura præ finita erit CE æqualis Ascui QD . Quæritur itaq. Area AEC , vel parallelogrammo $ACEF$ completo, quæritur excessus AEF . In quem finem sit (a) Latus rectum Conicæ Sectionis, et (b) Latus transversum sive $2AQ$. Sit etiam $AC = z$ & $CD = y$.



Erigitur $\sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}z^2} = y$, Equatio ad Conicam Sectionem ut notum est. Erit etiam $PC = \frac{b}{a}z$, et inde $PD = \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}z^2} - \frac{b}{a}z$.

Atq.

Utz Adio cum sit Fluxio Arcus QD ad Fluxionem Basis AC, ut PD ad CD, si Fluxio Basis supponatur 1. erit Arcus illius QD sive Applicatae CE Fluxio $\sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{bb+ab}{aa}zz}$. Hanc duc in FE sive z , et proveniet $z\sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{bb+ab}{aa}zz}$.
 Fluxio Area AEF adeoq; si in Applicata CD capias CG = $z\sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{bb+ab}{aa}zz}$,
 Area AGC quam illa CG super AC incedens describet, aequabitur Areae AEF, et erit AG Curva Geometrica. Quamvis itaq; Area AGC. Et in hunc finem substituatur z^4 pro z^2 in Aequatione novissima, et evadet $z\sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{bb+ab}{aa}z^4}$
 = CG Aequatio secunda Speciei undecimi Ordinis posterioris Catalogi. Et collatis utrobique terminis fit $d=1$, $e=\frac{1}{4}bb=g$, $f=\frac{bb+ab}{aa}$ et $h=\frac{b}{a}$; adeoq; $\sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{bb+ab}{aa}zz} = x$, $\sqrt{-\frac{b^3}{4a} + \frac{a+b}{a}xx} = v$, & $\frac{a}{b}S=t$. Hoc est CD = x , DP = v , & $\frac{a}{b}S=t$. Et inventorem talis est Constructio.

Ad Q erige QK perpendicularem & aequalem QA, et huic parallelam aequalem vero DP age HI per punctum D. Et Linea KI in quam HI terminatur erit Sectio Conica, Areaq; comprehensa HIKQ ad Areae quaesitam AEF ut b ad a , sive ut PC ad AC.

Nota, si mutes Signum b , Sectio Conica cujus Arcui recta CG aequatur, evadet Ellipsis, et praeterea si fiat $b=-a$, Ellipsis evadet Circulus: In quo casu Linea KI sit recta parallela AQ.

Postquam Curvae alicujus Area sic inventa fuerit de Constructionis Demonstratione consulendum est, quacum sine Computo Algebraico quantum liceat contexta oriatur Theorema ut evadat publicae notitiae dignum. Estq; demonstrandi methodus generalis quam sequentibus Exemplis illustrare conabor.

Demonstratio Constructionis in Exemplo 5.

In Arcu PQ sume punctum d proximum ad D, et age de ac dm parallelas DE, ac DM, et occurrentis DM et AP in p & t: Et erit DE, ed momentum Areae PDEP, et LM in l momentum Areae LMKP. Age, semidiametrum AD, et concipe indefinitè exiguum Arcum Dd esse instar rectae et Triangula Dpd et ALD erunt similia, adeoque $Dp:pd::AL:LD$. Est autem $HF:EH::AG:AF$, hoc est $AL:LD::ML:DE$; et proinde $Dp:pd::ML:DE$. Quare $DP \times DE = pd \times ML$. Hoc est momentum DE, ed aequale momentum LM in l. Et cum hoc de quibuslibet contemporaneis momentis indeterminate demonstraretur, patet singula momenta Areae PDEP esse singulis contemporaneis momentis Areae PLMK aequalia, adeoque totas Areas ex istis momentis compositas aequari. Q. E. D.

Demonstratio Constructionis in Exemplo 3.

Est DE, ed momentum Superfiei AHDE, ac Ad DA contemporaneum momentum Segmenti ADH, age semidiametrum DK et de occurrat AQ in C, estq; $Cc:Dd::DC:DK$. Propterea est $DC:QA(2DK)::AC:DE$; adeoque $Cc:2Dd::DC:2DK::AC:DE$. Et $Cc \times DE = 2Dd \times AC$. Jam ad Peripheriam momentum Dd recta productum (i.e. ad Tangentem Circuli) demitte Normalem AI, et erit AI aequalis AC; adeoque $2Dd \times AC (= 2Dd \times AI) = 4$ Triangulis ADd. Quare 4 Triangulis ADd = $Cc \times DE =$ momento DE, ed. Spatii ergo AHDE singula momenta sunt quadrupla momentarum contemporaneorum Segmenti ADH, et proinde totum illud Spatium quadruplum totius Segmenti. Q. E. D.

Demonstratio Constructionis in Exemplo 4.

Parallelam CE, age indefinitè parum distantem ce, et Hyperbola Tangentem Ck ac demitto KM rectam ad AP; et ex Hyperbolae natura erit $AC:AP::AP:AM$. Adeoque $AG^2:GL^2::AC^2:LE^2$ sive $AP^2::AP^2:AM^2$, ac divisim $AG^2:AL^2(DE^2)::AP^2:AM^2-AP^2(MK^2)$. Et inverse $AG:AP::DE:MK$. Est autem Area DE, ed ad Triangulum CKc ut altitudo DE ad semissem altitudinis KM: Hoc est, ut AG ad $\frac{1}{2}$ AP. Quare omnia Spatii PDE momenta ad omnia contemporaneas momenta Spatii PKC sunt ut AG ad $\frac{1}{2}$ AP. Et proinde tota illa Spatia sunt in eadem ratione. Q. E. D.

Demonstratio

Demonstratio Constructionis in Exemplo 6.

Parallelam et proximam CD age ad occurrentem Curvæ AE in e, age h i et f e occurrentes DC in p et q. Et erit ex Hypothesi Dd = Eq. Et ex similitudine triangulorum Dd, DCP erit $Dp : Dd (Eq) :: CP : PD (HI)$. Adeoque $Dp \times HI = Eq \times CP$, et inde $Dp \times HI$ (moment $HIih$): $Eq \times AC$ (moment $EFfe$): $Eq \times CP : Eq \times AC :: CP : AC$. Quare cum PC et AC sint in data ratione lateris transversi ad Latus rectum Conicæ Sectionis QD, et Areamum $HIKQ$ et AEF momenta $HIih$ & $EFfe$ in illa ratione erunt ipsæ Areae in eadem ratione. Q. E. D.

In hujusmodi Demonstrationibus observandum est quod quantitati pro æqualibus habes quarum ratio est æqualitatis. Et ratio æqualitatis censenda est quæ minus differt ab æqualitate quidem qualibet inæqualis ratio potest assignari. Sic in postremâ Demonstratione posui rectangulum $Eq \times AC$, sive $FEqf$ æquale spatio FE ef, quia (propter differentiam Ege infinite minorem ipsius sive respectu ipsarum nullam) non habent rationem inæqualitatis. Et eadem de causa posui $DP \times HI = HIih$, et sic in alijs.

Hæc Methodo probandi Curvas per æqualitatem vel datum rationem momentorum æquales ipse vel datum rationem habere hic usus sum: quod cum methodis in his rebus usitatis affinitatem habeat, sed magis naturalis videtur quæ genesi Superficierum ex Fluxu motu innititur. Sic si Constructio in Exemplo 2 demonstranda sit; Ex natura Circuli est Fluxio rectæ ID ad Fluxionem rectæ IP, ut AI ad ID: Estq; AI ad ID ut ID ad CE ex Natura Curvæ AGE; et proinde $CE \times ID = ID \times IP$, sed $CE \times ID =$ Fluxioni Aree ACEG, et $ID \times IP =$ fluxioni Aree PDI, et propterea Area illa æqualiter, fluendo genita æqualis oritur. Q. E. D.

Plurimæ illustrationis gratia adjeciam Demonstrationem Constructionis quæsioidis Area in Exemplo 3 determinatur: Lineæ punctim notatæ in Schemate delineantur, et agatur DQ et Cissoïdis Asymptoton QR: et ex natura Cissoïdis est $DQ^2 = AQ \times CQ$, et inde per Prob. 1, $2DQ \times \text{flux: ipsius } DQ = AQ \times \dot{CQ}$. Adeoque $AQ : DQ :: 2\dot{DQ} : \dot{CQ}$. Est et ex natura Cissoïdis $ED : AD :: AQ : DQ$, Quare $ED : AD :: 2\dot{DQ} : \dot{CQ}$. Et $ED \times \dot{CQ} = AD \times 2\dot{DQ}$, sive $= 4 \times \frac{1}{2} AD \times \dot{DQ}$. Jam cum DQ perpendiculari sit ad terminum ipsius AD circa A gyrantis, ut $\frac{1}{2} AD \times \dot{QD} =$ fluxioni generanti Aream ADOQ est et ejus quadruplum $ED \times \dot{CQ} =$ fluxioni generanti Cissoïdalem Aream QREDO. Et proinde Area illa infinite longa QREDO generatur quadrupla alterius ADOQ. Q. E. D.

Scholium

Scholium.

Per præcedentes Catalogos non tantum Area Curvarum, sed et alia cujuscunque generis quantitates analogæ fluendi ratione generantur, e fluxionibus derivari possunt. Idque mediante hoc Theoremate; quod quantitas cujuscunque generis sit ad unitatem congeneram ut Area Curvæ ad unitatem Superficialem, si modo fluxio quantitatem illam generans sed ad unitatem sui generis ut fluxio generans Area ad unitatem sui generis, hoc est, ut Linea super Basi normaliter incidens quæ Area illa describitur, ad unitatem Linearum. Et proinde si fluxio quæcunque exponatur per ejusmodi Lineam incidentem quantitas ab illa fluxiones generata exponetur per Area ad illa incidente descriptam, vel si fluxio per eosdem terminos Algebraicos cum incidente Linea exponatur, quantitas generata exponetur per eosdem cum Area descripta. Aequatio itaque quæ fluxionem cujuscunque generis exhibet querenda est in prima Columna Catalogorum et valor t in ultima Columna indicabit quantitatem generatam.

Quemadmodum si $\sqrt{1 + \frac{2z}{4a}}$ Fluxionem cujuscunque generis exhibeat pone æqualem y , et ut ad formam Aequationum in Catalogis reducat substatue z^4 pro z , sic enim evadet $z^4 \sqrt{1 + \frac{2z}{4a}} = y$, Aequatio primæ Speciei tertij Ordinis prioris Catalogi et collatis terminis fiet $d=1, e=1, f=\frac{2a}{4a}$, et inde $\frac{8a+18z}{27} \sqrt{1 + \frac{2z}{4a}} (= \frac{2d}{11} R^3) = t$. Est itaque $\frac{8a+18z}{27} \sqrt{1 + \frac{2z}{4a}}$ quantitas quæ generatur fluxione $\sqrt{1 + \frac{2z}{4a}}$.

Atque ita si $\sqrt{1 + \frac{16z^3}{9a^3}}$ designat fluxionem per debitam reductionem (extrahendo $z^{\frac{2}{3}}$ e radicali, et scribendo z^4 pro $z^{\frac{2}{3}}$) habebitur $\frac{1}{24} \sqrt{2 + \frac{16z^3}{9a^3}} = y$, Aequatio secundæ Speciei quinti Ordinis posterioris Catalogi, et collatis terminis fit $d=1, e=\frac{16}{9a^3}$, et $f=1$. Adeoque $z^{\frac{2}{3}} (= \frac{1}{z^4}) = xx, \sqrt{1 + \frac{16z^3}{9a^3}} = v$, et $\frac{3}{2} s (= -\frac{2d}{4} s) = t$. Quibus inventis quantitas per fluxionem $\sqrt{1 + \frac{16z^3}{9a^3}}$ generata innotescet ponendo esse ad unitatem sui generis ut Area $\frac{3}{2} s$ ad unitatem Superficialem, vel quod eodem recidit, ponendo quantitatem t non amplius Superficiem significare, sed alterius generis quantitatem quæ est ad unitatem ejusdem generis ut Superficies illa ad unitatem Superficialem. Sic posito quod $\sqrt{1 + \frac{16z^3}{9a^3}}$ designet fluxionem linearem imaginor t non amplius Superficiem sed Lineam jam significare eam nempe quæ ad unitatem Linearum est ut Area quam t quarta Catalogos designat ad unitatem Superficialem, hoc est eam quæ producit applicando Area illam ad linearem unitatem. Qua ratione si linearis unitas statuatur e longitudo per præfatam fluxionem generata erit $\frac{3s}{2}$. Et hoc fundamento Catalogi illi ad Longitudines Curvarum, Contenta Solidorum, et alias quascunque quantitates æque ac Areas Curvarum determinandas applicari possunt.

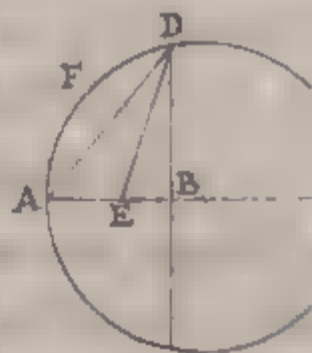
De

De Quaestionibus cognatis.

1. Curvarum Areas per Mechanicam approximare.

Methodus est ut duarum pluriumve Rectilinearum figurarum valores ita componantur inter se ut valorem Areae Curvae quam proximè constituent.

Sic ad Circulum AFD quem Aequatio $x - xx = zz$ designat postquam invenitur Area AFDB valor $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{10}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{12}x^{\frac{9}{2}}$ &c. quorundam sunt aliquot rectangulorum valores, quales sunt ipsius BD x AB valor $x\sqrt{x-xx}$ sive $x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{9}{2}}$ &c. ac ipsius AD x AB valor $x\sqrt{x}$ sive $x^{\frac{3}{2}}$. Dein hi valores per literas quaslibet diversas (quae numeros indefinite designent) multiplicandi sunt et addendi. Summaque termini cum correspondentibus terminis valoris Areae AFDB comparandi ut quantum liceat evadant aequales. Quemadmodum si per e et f multiplicentur, fiet Summa $\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}ex^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}ex^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}ex^{\frac{7}{2}}$ &c. ejus terminis cum terminis hinc $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{10}x^{\frac{7}{2}}$ &c. collatis, prodit $e+f = \frac{2}{3}, e - \frac{1}{2}e = -\frac{1}{3}$, sive $e = \frac{2}{3}, f (= \frac{2}{3} - e) = \frac{1}{3}$. Adeoque est $\frac{2}{3}BD \times AB + \frac{1}{3}AD \times AB = \text{Area AFDB proximè}$. Scilicet $\frac{2}{3}BD \times AB + \frac{1}{3}AD \times AB$ valet $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{10}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{40}x^{\frac{9}{2}}$ &c. quod ab Area AFDB subductum relinquit solummodo errorem $\frac{1}{70}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{70}x^{\frac{5}{2}}$ &c.



Sic bisecta AB in E, rectanguli AB x DE valor erit $x\sqrt{x - \frac{1}{4}xx}$, sive $x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{128}x^{\frac{7}{2}} - \frac{27}{1024}x^{\frac{9}{2}}$ &c. Et hoc collatum cum rectangulo AD x AB dat $\frac{8DE + 2AD}{15}$ in AB = Area AFDB, errore tantum exidente $\frac{1}{360}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3760}x^{\frac{5}{2}}$ &c. qui semper minor est quam $\frac{1}{1500}$ totius Areae etiam si AFDB ponatur quadrans Circuli. Hoc autem Theorema sic enunciari potest. Ut 3 ad 2 ita rectangulum AB in DE, plus quinta parte differentiae inter AD ac DE ad Area AFDB proximè.

Atq; ita conferendo duo rectangula AB x ED et AB x BD, vel omnia tria rectangula inter se, vel adhibendo adhuc ~~et~~ rectangula posunt aliae regulae excogitari, eaq; tanto exactiores quae plura rectangula adhibentur. Et idem de Area Hyperbolae ac aliarum Curvarum intelligendum est. Imò et per unicum tantum rectangulum Area plerumq; commode exhiberi potest, ut in praedicto Circulo si capiatur AE ad AB ut $\sqrt{10}$ ad 5, rectangulum AB x ED erit ad Area AFDB ut 3 ad 2, errore tantum exidente $\frac{1}{175}x^{\frac{3}{2}} + \frac{11}{2250}x^{\frac{5}{2}}$ &c.

2. Ex datâ Area Basem et Incidentem Lineam determinare.

Ubi Area per finitam Aequationem exhibetur nihil occurrit difficultatis. Ubi verò per infinitam exhibetur, affecta radice extrahenda est quæ Basem designat. Sic ad Hyperbolam quam Aequatio $\frac{ab}{a+x} = z$ designat postquam inventum est $z = bx - \frac{bx^2}{2a} + \frac{bx^3}{3a^2}$ &c. ut ex data Area z vicissim innotescat Basis x , extrahe radicem affectam et proveniat $x = \frac{z}{b} + \frac{z^2}{2ab} + \frac{z^3}{6a^2b^2} + \frac{z^4}{24a^3b^3} + \frac{z^5}{96a^4b^4}$ &c. Et præterea si incedens z desideretur, divide ab per $a+x$ hoc est per $a + \frac{z}{b} + \frac{z^2}{2ab} + \frac{z^3}{6a^2b^2}$ &c. et emerget $z = b - \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2b} - \frac{z^3}{6a^3b^2} + \frac{z^4}{24a^4b^3}$ &c.

Sic ad Ellipsin quam Aequatio $ax - \frac{a}{c}xx = z^2$ designat postquam inventa fuerit Area $z = \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5c} - \frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{70c^2} - \frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{9}{2}}}{728c^3}$ &c. Scribe v pro $\frac{32}{2a^{\frac{1}{2}}}$ ac t pro $x^{\frac{1}{2}}$, et evadet $v^3 = t^3 - \frac{5t^5}{10c} - \frac{7t^7}{56c^2} - \frac{t^9}{40c^3}$ &c. et extracta radice $t = v + \frac{v^3}{10c} + \frac{81v^5}{1400c^2} + \frac{1171v^7}{25200c^3}$ &c. Cujus quadratum $vv + \frac{v^4}{5c} + \frac{22v^6}{175c^2} + \frac{823v^8}{7075c^3}$ &c. valet x . Et hoc valore pro x in Aequatione $ax - \frac{a}{c}xx = z^2$ substituto et extracta radice provenit $z = a^{\frac{1}{2}}v - \frac{2a^{\frac{1}{2}}v^3}{5c} - \frac{30a^{\frac{1}{2}}v^5}{175c^2} - \frac{407a^{\frac{1}{2}}v^7}{2250c^3}$ &c. Adeoque ex data Area z et inde v sive $\sqrt[3]{\frac{32}{2a^{\frac{1}{2}}}}$ dabitur Basis x et Incedens z . Quæ omnia ad Hyperbolam etiam accommodantur si modo Signum quantitatis c ubiq^{ue} mutetur ubi existit imparium Dimensionum.

Problem: 10.

Curvas pro arbitrio multas invenire quarum Longitudines per finitas Aequationes designari possunt.

Ad hujus resolutionem via per sequentes Propositiones sternitur.

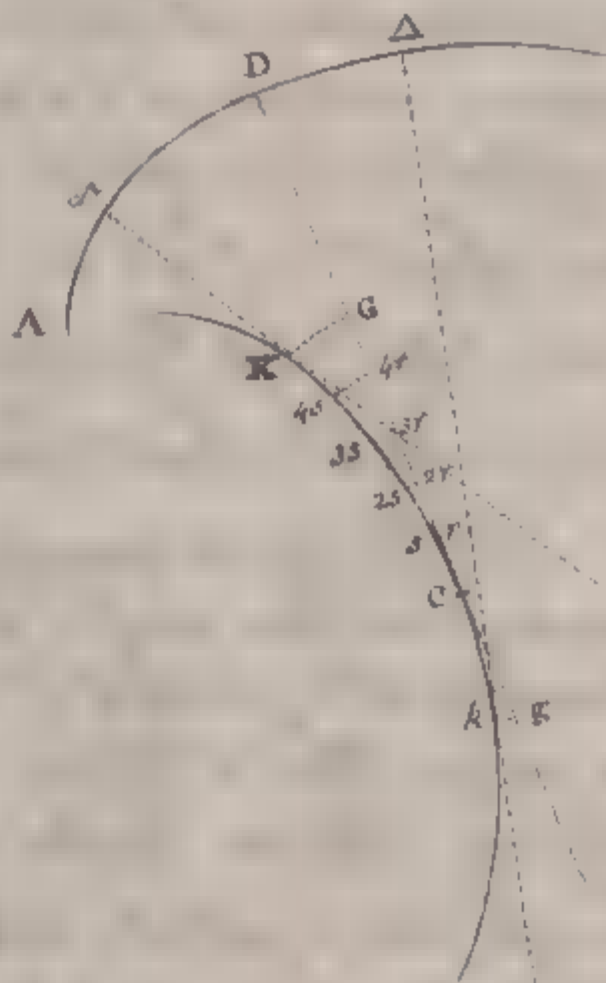
1. Si recta DC in Curvam quamvis AD perpendiculariter insistens moveri conspiciatur, Singula ejus puncta G, k, r &c describent alias equidistantes sibiq perpendicularares Curvas GK, gk, rsk.

2. Si recta illa hinc inde indefinitè producaturs ejus extremitates movebuntur ad contrarias motus, quod & ideo dici potest Centrum motionis, idem est cum Centro Curvature quam Curva AD habet ad punctum D, ut supra diximus. Sed autem punctum est C.

3. Si Lineam AD non circulem esse sed difformiter incurvatam supponamus puta magis Curvam in δ et minus in Δ illud Centrum continuo mutabitur proprius accedens ad partes magis Curvas, ut in K, et longius recedens a partibus minus Curvis, ut in k, eoque pacto lineam aliquam qualis Kck describet.

4. Hanc a Centro Curvature descriptam Lineam recta DC continuo tanget. Nam si recta illius punctum D moveat versus δ , ejus punctum G quod interea transit ad K et situm est ad eandem partem Centri C movebit versus eandem plagam (per Propositionem 2.^{am}) Deinde si idem D moveat versus Δ punctum g quod interea transit ad k, situm est ad contrariam partem Centri C movebit ad contrariam plagam, hoc est ad eandem plagam ad quam G in priori casu movebat dum transit ad K. Et proinde K & k jacent ad eandem partem rectae DC. Quare cum K & k indeterminatè pro quibuslibet punctis sumantur patet totam illam Curvam jacere ad eandem partem rectae DC, proinde ab illa non secari sed tangi tantum.

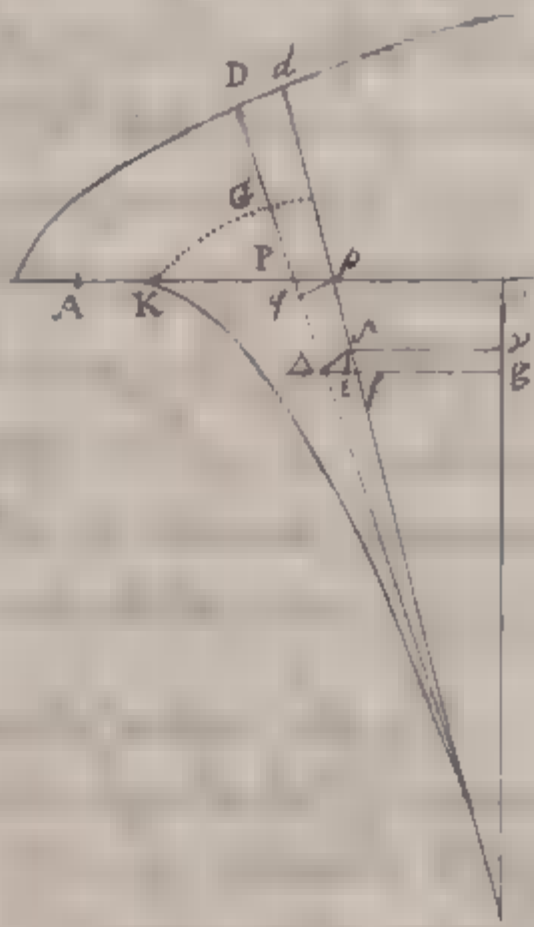
Hic supponitur lineam $\delta\Delta$ magis Curvam esse a parte δ continuo et minus a parte Δ . Quod si maxima minime Curvatura fuerit ad ipsum D, tunc recta DC secabit Curvam KC, Sed in Angulo tamen



Item si qualis sit haec Curva quantaq; ejus Longitudo, non amplius — habita relatione ad parabolam scire desideretur; Dic $KL = z$ & $LC = v$, et erit $z (= AL - \frac{1}{2}a) = 3x$ seu $\frac{1}{3}z = x$, et $\frac{az}{3} (= ax) = yy$, adeoq; $4\sqrt{\frac{z^3}{27a}} (= \frac{4y^3}{3a} = CL) = v$, sive $\frac{16z^3}{27a} = v^2$. Quod indicat Curvam KC esse parabolam secundi generis. Et pro ejus Longitudine prodit $\frac{3a + 4z}{3a} \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{3}az} - \frac{1}{2}a$, scribendo $\frac{1}{3}z$ pro x in valore CG.

Potest etiam problema resolvi per assumptionem Aequationis quae relationem inter AP et PD (posita nempe P intersectione Basis & perpendiculari) definiant. Nam dictis $AP = x$

et $PD = y$, concipe CPD per spatium quoniam minimum moveri putat ad locum CPd, inq; CD et Cd sumpto CΔ et Cδ, ejusdem cujusvis datae longitudinis puta 1, et ad CL demissis Δg, δv perpendicularibus quorum Δg (quod dic z) occurrat Cd in f, et completo parallelogrammum gvdε, positisq; x, y & z flexionibus quantitatibus x, y & z, ut supra; erit Δε:Δf (:: Δε²:Δδ² :: Cg²:Cδ²) :: Cg²:CΔ, et Δf:Pp :: CΔ:CP. Et ex aequo Δε:Pp :: Cg²:CΔ. Est autem Pp momentum Basis AP cujus additamento evadit Ap, ac Δε contemporaneum momentum perpendiculari Δg cujus ablatione evadit δv.



Addeog; Δε et Pp sunt ut Fluxiones linearum Δg (z) et AP (x) hoc est ut z et x. Quare z:x :: Cg²:CΔ. Et proinde cum sit Cg² (= CΔ² - Δg²) = 1 - zz et CΔ = 1 erit $CP = \frac{x - xz^2}{z}$. Et insuper cum e tribus x, y & z quamlibet pro uniformi flexione ad quam cetera referantur haberi liceat, si ista ponatur x ejusq; quantitas unitas evadit, $CP = \frac{1 - zz}{z}$.

Quarta est CΔ(1):Δg(z)::CP:PL; et CΔ(1):Cg(√1-zz)::CP:CL; Adeoq; sit $PL = \frac{z - z^3}{z}$, et $CL = \frac{1 - zz}{z} \sqrt{1 - zz}$. Ac deniq; acta p q parallela Arcui infinite parvo Dd seu perpendiculari DC, erit Pp momentum ipsius DP cujus additamento evadit dp, simul ac AP evadit Ap. Et idcirco Pp & Pq sunt ut Fluxiones ipsarum AP (x) et PD (y) hoc est ut 1 et y; Atq; adeo cum propterea similia Triangula Ppq et CΔg, CΔ ac Δg seu 1 et z sint in eadem ratione erit y = z. Unde talis evadit problematis resolutio.

Et proposita Aequatione quae relationem inter x et y designet
 quare relationem fluxionum \dot{x} et \dot{y} (per Prob. 1.) etposito $\dot{x} = 1$, ha-
 bebatur valor \dot{y} cui z aequatur. Dein substituto z pro \dot{y} in Aequa-
 tione novissima quare relationes fluxionum \dot{x} , \dot{y} et \dot{z} (per eadem
 Prob. 1.) et iterum substituto 1 pro \dot{x} obtinebatur valor \dot{z} . Quibus ha-
 bitis fac $\frac{1-\dot{y}\dot{y}}{z} = CP, 2 \times CP = PL$ & $CP \times \sqrt{1-\dot{y}\dot{y}} = CL$; et erit C ad
 Curvam cujus praeter quavis KC aequatur recta CG differentia nempe
 Tangentium ductarum a Punctis C et K perpendiculariter ad
 Curvam DD .

Exemplum.

Sit $ax = yy$ Aequatio quae relationem inter AP & PD designet,
 et per Prob. 1. primo erit $ax = 2yz$, seu $a = 2yz$. Deinde $0 = 2yz$
 $+ 2yz$ seu $-\frac{2z}{y} = \dot{z}$. Inde fit $CP = (\frac{1-\dot{y}\dot{y}}{z} = y - \frac{4y^3}{aa} PL = (2 \times CP =) \frac{1}{2} a$
 $- \frac{2yz}{a}$, et $CL = \frac{aa - 4yy}{2aa} \sqrt{4yy - aa}$. Et a CP ac PL ablati y & x restat CD
 $= -\frac{4y^3}{aa}$, et $AL = \frac{1}{2} a - \frac{3yz}{a}$. Aufere autem y et x quod CP & PL ubi valores
 habent affirmativos cadant ad partes puncti P versus D & A , et tunc diminui
 debent auferendo affirmativas quantitates PD & AD . Ubi vero negativos va-
 lores obtinent, cadent ad contrarias partes puncti P & tunc augeri debent,
 id quod etiam fit auferendo affirmativos quantitates PD & AD .

Item. Curvae in qua punctum C locatur Longitudo inter duo quavis
 puncta K & C noscatur; quare Longitudinem tangentis ad punctum K et
 aufero a CD . Quomodo si K sit punctum ad quod tangens terminatur
 ubi CD & Ag seu 1 & 2 poneantur aequales quodq; proinde in ipsa Basi AP
 situm est; scribe pro z in Aequatione $a = 2yz$, & prodit $a = 2y$. Quare pro y
 scribe $\frac{1}{2}a$ in valore CD nempe in $-\frac{4y^3}{aa}$, et oritur $-\frac{1}{2}a$. Estq; haec Longitudo tan-
 gentis ad punctum K , sive ipsius DG inter quam & superiorem indefinitam
 valorem CD differentia $\frac{4y^3}{aa} - \frac{1}{2}a$ est GC cui Curva pars KC aequatur.

Ult. insuper pateat qualis sit haec Curva, ab AL (mutato prius signo
 ut evadat affirmativa) aufer AK quae erit $\frac{1}{4}a$ et restabit $KL = \frac{3yz}{a}$
 $- \frac{3}{4}a$ quam dic t , et in valore Lineae CL quam dic v scribe $\frac{4at}{3}$
 pro $4yy - aa$, & prodit $\frac{2t}{3a} \sqrt{\frac{4}{3}at} = v$. Seu $\frac{16t^3}{27a} = vv$ Aequatio ad
 Parabolum secundi generis ut supra.

Siquando

Si quando relatio inter t & v minus commodè ad Aequationem redigi possit, sufficit investigasse tantum Longitudines PC & PL . Quamvis modum si pro relatione in AP & PD assumatur Aequatio $3a^2x + 3a^2y - y^3 = 0$, Inde (per Prob. 1.) primo prodit $a^2 + a^2z - y^2z = 0$, deinde $a^2z - 2yz^2 - y^2z = 0$. Atq; adeo est $z = \frac{aa}{yy - aa}$ & $\dot{z} = \frac{2yz^2}{aa - yy}$. Unde dantur $PC = \frac{1 - \frac{yy}{aa}}{z}$, & $PL = z \times PC$, quibus punctum C quod ad Curvam situm est determinatur. Et Longitudo Curvae inter duo jussimodi puncta & differentia conespicientium duarum Tangentium DC sive $PC - y$ innotescit.

Ex. Gr. Si ponatur $a = 1$, et ad determinandum aliquod Curvae punctum C sumatur $y = 2$; evadet AP seu $x (= \frac{y^3 - 3a^2y}{3a^2}) = \frac{2}{3}$, $z = \frac{1}{3}$, $\dot{z} = -\frac{4}{9}$, $PC = -2$, & $PL = -\frac{2}{3}$. Deinde ad aliud punctum determinandum si sumatur $y = 3$, evadet $AP = 6$, $z = \frac{1}{6}$, $\dot{z} = -\frac{3}{256}$, $PC = -84$, & $PL = -10\frac{1}{2}$. Quibus habetis si auferatur $y = PC$ restabit -4 in priori casu, et -87 in secund. casu, pro Longitudinibus DC quarum differentia 83 est Longitudo Curvae inter inventa duo puncta C & C .

Haec ita intelligenda sunt ubi Curva inter puncta duo C et C vel X et C continuatur sine termino quon cuspidi assimilavimus. Sed ubi unus vel plures ejusmodi termini interjacent istis punctis (qui termini inveniuntur per determinationem Maximæ aut Minimæ PC vel DC) Longitudines Singularum partium Curvae inter istos et puncta C vel X seorsim investigari debent & addi.

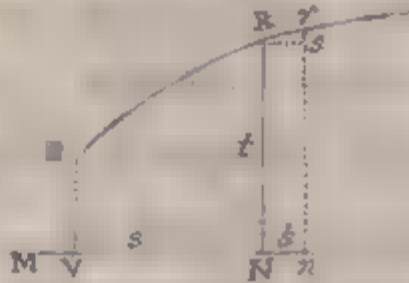
Problem: 11.

Curvas invenire quoscunque, quarum Longitudines cum proposita alicujus Curvae Longitudine, vel cum Area ejus ad datam Lineam applicatâ ope finitarum Equationum comparari possunt.

Peragitur involvendo Longitudinem Arcamve propositae Curvae in Equatione quae in praecedente Problemate assumitur ad determinandam relationem inter AP & PD. Sed ut z & \dot{z} inde per Prob. 1 eliciantur, fluxio Longitudinis vel Areae illius prius investigari debet.

Fluxio Longitudinis ejus determinatur ponendo aequalem radii quadraticae Summae quadratorum a Fluxionibus Basis, & perpendiculari: lenter incidentis.

Sit enim RN Linea perpendiculariter incedens super Basi MN & QR Curva proposita ad quam RN terminatur. Disting. MN = s , NR = t , et QR = v et earum fluxionibus \dot{s} , \dot{t} & \dot{v} , respective; conripe lineam NR ad locum quam proximum n & r promoveri, et demisso ad n & r perpendiculari RS, erunt RS, Sr & Rr contemporanea Momenta Linearum MN, NR, et QR quorum Adde: tamentis evadunt Mn, nr et Qr. Et cum haec sint inter se ut earundem linearum fluxiones, ac propter Angulum rectum Bsr sit $\sqrt{RS^2 + Sr^2} = Rr$, erit $\sqrt{\dot{s}^2 + \dot{t}^2} = \dot{v}$.



Ad determinandas autem fluxiones \dot{s} et \dot{t} dua requiruntur Equationes una quae definiat relationem inter MN et NR, seu s et t , unde relatio fluxionis \dot{s} et \dot{t} evadenda est, et alia quae definiat relationem inter MN vel NR ad datam figuram et AP seu x ad qua sitam, unde relatio fluxionis \dot{s} vel \dot{t} ad fluxionem \dot{x} seu 1 innatescit.

Invento \dot{v} , fluxiones \dot{y} & \dot{z} per assumptam tertiam Equationem quae Longitudo PD sive y definitur investiganda sunt, et capienda $PC = \frac{1-\dot{y}\dot{y}}{\dot{z}}$, $PL = \dot{y} \times PC$, ac $DC = PC - y$, ut in praecedente Problemate.

Exemplum: 1.

Sit $as - ss = tt$ Equatio ad datam Curvam QR, utpote Circulum, $2ax = as$ relatio inter lineas AP et MN, et $\frac{2}{3}v = y$, relatio inter Longitudinem datae Curvae QR directae PD. Per primam fit $as - 2ss = 2tt$, seu $\frac{a-2s}{2t} \dot{s} = \dot{t}$, et inde $\frac{a-2s}{2t} \dot{s} = \dot{t}$ ($= \sqrt{\dot{s}^2 + \dot{t}^2}$) = \dot{v} . Per secundam fit $2ax = as$, adeoque est $\frac{x}{a} = \frac{s}{2t}$. Et per tertiam fit $\frac{2}{3}v = y$ hoc est $\frac{2x}{3t} = z$, dein hinc fit $\frac{2x}{3t} - \frac{2x\dot{t}}{3t^2} = \dot{z}$. Quibus inventis capienda sunt $PC = \frac{1-\dot{y}\dot{y}}{\dot{z}}$, $PL = \dot{y} \times PC$ & $DC = PC - y$, sive $PC - \frac{2}{3}QR$. Ubi patet Longitudinem datae Curvae QR inveniri non posse quin simul innatescat Longitudo recta DC, indeq; Longitudo Curvae ad quam punctum C cadit. Et contra.

Examp:

Exempl: 2.

Stante $as - ss = tt$, ponatur $x = s$, & $vv - 4ax = 4ay$. Per primam inveniatur $\frac{as}{2t} = v$ ut supra. Per secundam vero $1 = s$ atq; adeo $\frac{a}{2t} = v$. Et per tertiam $2vv - 4a = 4ay$, sete (eliminato v) $\frac{v}{4t} - 1 = z$, dein hinc $\frac{v}{4t} - \frac{vt}{4t} = z$.

Exempl: 3.

Ponantur tres Equationes $aa = st$, $a + ss = x$, & $x + v = y$. Et per primum, quæ Hyperbolam denotat) evadit $0 = st + ts$, seu $-\frac{st}{s} = t$, et inde $\frac{s}{s} \sqrt{ss + tt} (= \sqrt{s^2 + t^2}) = v$. Per secundam evadit $ss = 1$, adeoq; est $\frac{1}{ss} \sqrt{ss + tt} = v$. Et per tertiam fit $1 + v = y$, sive $1 + \frac{1}{ss} \sqrt{ss + tt} = z$, dein hinc fit $iv = z$, posita scilicet iv fluxione radicalis $\frac{1}{ss} \sqrt{ss + tt}$, quæ si fingatur æqualis w sive $\frac{1}{s} + \frac{tt}{ss} = ww$, proveniet inde $\frac{2tt}{9ss} - \frac{2tt}{9s^3} = 2wv$. Et substituto imprimis $-\frac{st}{s}$ pro t , deinde $\frac{1}{s}$ pro s , factaq; divisione per $2w$, habebitur $-\frac{2t^2}{27ws^3} = (w =) z$. Invenitis y & z cætera peraguntur ut in exemplo primo.

Quod si a quovis Curvæ puncto Q perpendicularum QV ad MN demittatur et Curva invenienda sit cujus Longitudo Longitudinem quæ oritur applicando Aream QRNV, ad datam aliquam lineam innotescat: ponatur illa data Linea E, Longitudo $\frac{QRNM}{E}$, quæ ex applicatione oritur v, et ipsius v fluxio i . Et cum fluxio Aree QRNV sit ad fluxionem Aree parallelogrammi rectanguli super VN ad Altitudinem E, constituti ut incedens Linea NB seu t, quæ hæc describitur ad incedentem lineam E quæ illud eodem tempore describitur; et Longitudinem quæ oritur applicando Areas illas ad datam E, hoc est Lineæ v et MN seu s fluxiones v et s sint in eadem ratione, erit $v = \frac{st}{E}$. Per hanc itaq; Regulam valor v inquirendus est, cæteraq; ut in precedentibus Exemplis peragenda.

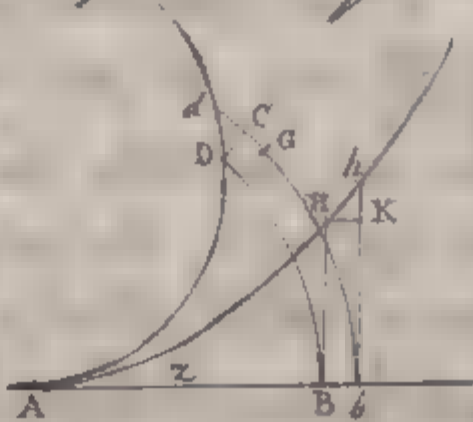
Exempl: 4.

Sit QR Hyperbola quam Equatio $aa + \frac{ass}{t} = tt$ definit, et inde juxta prob. 1. evadet $\frac{ass}{t} = tt$, sive $\frac{ass}{t} = t$. Dein si pro alijs duabus Equationibus assumantur $x = s$, et $y = v$; prior dabit $1 = s$, unde fit $v (= \frac{st}{E}) = \frac{t}{E}$; et posterior dabit imprimis $y = v$, sive $z = \frac{t}{E}$, dein hinc $z = \frac{t}{E}$, et substituto $\frac{ass}{t}$, sive $\frac{as}{t}$ pro t evadet $z = \frac{as}{ECT}$. Invenitis y et z fac $\frac{1-y}{2} = CP$, et $y \times CP = PL$, ut in precedentibus, et inde punctum C adeoq; Curva in quam omnia ejusmodi puncta cadunt determinabitur cujus Curvæ Longitudo ex Longitudine DC quæ vadet CP - v innotescet, uti satis ostendimus.

Et

Est et alia Methodus qua problema resolvitur, querendo nempe Curvas quarum fluxiones vel aequentur fluxioni Curva proposita, vel ex illius et aliarum Linearum fluxionibus componantur. Et haec aliquando usui esse potest praesertim in convertendo Mechanicas Curvas in aequabiles Geometricas. Cujus rei insigne est Exemplum in Spiralibus.

Sit AB recta positione data BD Arcus super AB tanquam Basi incedens ac interea retinens A pro Centro, ADd Spiralis ad quam Arcus ille perpetim terminatur bd Arcus ~~proximus~~ proximus, sive locus in quem Arcus BD dum incedit proximè movetur, DC perpendicularis ad Arcum bd, dG differentia Arcuum Att alia Curva Spirali AD aequalis, BH recta super AB normaliter incedens ac terminata ad Curvam AH, bh locus quam proximus in quem recta illa incedit, et HK perpendicularis ad bh. Et in Triangulis infinite parvis DCd. ac HKH, cum DC et HK aequalia sint eidem tertio Bb, indeq; sibi mutuo aequalia, ac Dd et Hh ex Hypothesi sint correspondentes partes aequalium Curvarum et inde etiam aequalia, nec non Anguli ad C et K recti, recta etiam latera dC et hK aequalia erunt. Quare cum insuper sit AB:BD::Ab:bC::Ab-AB(Bb):bC-BD(CG.) Adeoq; $\frac{BD \times Bb}{AB} = CG$; si hoc auferatur dG, restabit $dG - \frac{BD \times Bb}{AB} (= dC) = hK$. Dic itaq; AB = z, BD = v et BH = y, et earum fluxiones \dot{z} , \dot{v} et \dot{y} respective; et cum Bb, dG et hK sint eandem contemporanea momenta quorum additamentis evadunt Ab, bd et bh, et proinde inter se sint ut fluxiones, ideo pro momentis in Aequatione novissima substituantur fluxiones juxta et nota pro lineis et emerget $\dot{v} - \frac{v\dot{z}}{z} = \dot{y}$. Ubi si fluxionibus \dot{z} ~~prox~~ aequabili habeatur et supponatur unitas esse ad quam cetera referantur evadet $\dot{v} - \frac{v}{z} = \dot{y}$.



Quamobrem data per Aequationem aliquam relatione inter AB et BD (sive x et v) qua Spiralis definietur, dabitur (per prob. 1.) Fluxio \dot{v} , et inde etiam Fluxio \dot{y} ponendo aequalem $\dot{v} - \frac{v}{z}$. Atq; haec per prob. 2 dabit lineam y sive BH cujus est Fluxio.

Exempl. 1.

Si detur $\frac{zz}{a} = v$ Aequatio nempe ad Spiralem Archimedeam, inde per prob. 1. elicitur $\frac{2z}{a} = \dot{v}$. A quo aufer $\frac{v}{z}$ sive $\frac{z}{a}$, et restabit $\frac{z}{a} = \dot{y}$ et inde per prob. 2. fit $\frac{zz}{2a} = y$. Quod indicat Curvam AH cui haec Spiralis AD aequatur esse Parabolam Apollonianam cujus latus rectum existit 2a; sive cujus incedens BH perpetuo aequatur semispi Arcus BD.

Exempl. 2.

Exempl: 2.

Si proponatur Spiralis quam Aequatio $z^3 = av^3$, sive $v = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$ definit
emerget per Prob: 1. $\frac{3z^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} = v$; A quo si auferatur $\frac{v}{2}$ seu $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$ restabit
 $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} = y$, et inde per Prob: 2. producet $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}} = y$. Hoc est $\frac{1}{3} BD = BH$,
existente AH parabola secundi generis.

Exempl: 3.

Si ad Spiralem sit $z\sqrt{\frac{a+z}{c}} = v$. Exinde per Prob: 1. elicietur
 $\frac{2a+3z}{2\sqrt{ac+zc}} = v$. A quo si auferatur $\frac{v}{2}$ sive $\sqrt{\frac{a+z}{c}}$, restabit $\frac{z}{2\sqrt{ac+zc}} = y$.
Iam cum quantitas hac Fluxione y generata nequeat inveniri per
qua in Prob: 2. habetur, nisi fiat resolutio in infinitam Seriem; juxta
tenorem Scholij Prob: 9. reduco ad formam Aequationum in prima columna
Catalogorum, substituendo z^n pro z , evadit $\frac{z^{2n-1}}{2\sqrt{ac+cz^n}} = y$, Aequatio
nempe secunda Speciei quarti ordinis prioris Catalogi. Et conferendo
terminos fit $d = \frac{1}{2}$, $e = ac$ et $f = c$, adeoque $\frac{z-2a}{3c}\sqrt{ac+cz} (=t) = y$.
Quae Aequatio est ad Curvam Geometricam AH cui Spiralis AD aequatur.

Problem.

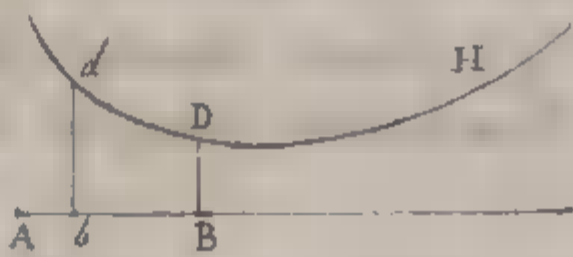
Curvarum Longitudines determinare.

Fluxionem Curvae Lineae in superiore Problemate ostendimus aequalem esse radici Quadraticae Summae Quadratorum a Fluxionibus Basis est perpendiculariter Incidentis. Et proinde si Basis fluxionem pro unitate ac determinata mensura, nimirum unitate, ad quam ceterae Fluxiones referantur, habeamus, et insuper per Aequationem quaelibet definit quaramus Fluxionem Incidentis habebitur Fluxio Curvae Lineae a qua Longitudo ejus per Prob. 2. elicienda est.

Exempl. 1.

Proponatur Curva FDH quam Aequatio $\frac{z^3}{aa} + \frac{aa}{12z} = y$ definit, posito scilicet $z =$ Basi AB, ac $y =$ Incidenti DB: Et ex Aequatione illa per Prob. 1. elicietur $\frac{32z}{aa} - \frac{aa}{12z} = y$, existente nimirum 1 fluxi- ipsius z et y fluxione y . Dein additis fluxionum Quadratis fit Summa $\frac{9z^4}{a^4} + \frac{1}{2} + \frac{a^4}{144z^4} = tt$, et extracta radice $\frac{32z}{aa} + \frac{aa}{12z} = t$, indeq. per Prob. 2. $\frac{z^3}{aa} - \frac{aa}{12z} = t$, ubi t fluxionem Curvae ac t Longitudinem designat.

Itaq. si cujusvis portiones Curvae hujus puta dD Longitudo desideretur a punctis d ac D de: mitte ad AB perpendiculari db = DB et in valore t substitue quantitates Ab et AB seorsum pro z ac differentiarum productorum erit Longitudo quæsita dD. Quomodo si sit $Ab = \frac{1}{2}a$ et $AB = a$, scripto $\frac{1}{2}a$ pro z evadet $t = -\frac{a}{24}$, dein scripta a pro z , evadet $t = \frac{11a}{12}$, a quo si prior valor auferatur restabit $\frac{23a}{24}$ pro Longitudine dD. Vel si Ab tantum definiatur esse $\frac{1}{2}a$, et AB spectetur indefinitum restabit $\frac{z^3}{aa} - \frac{aa}{12z} + \frac{a}{24} = dD$.



Quod si cupias noscere portionem Curvae quam t designat, finge valorem t aequari nihilo, et evadet $z^4 = \frac{a^4}{12}$, sive $z = \sqrt[4]{\frac{a^4}{12}}$. Udeoy si sumatur $Ab = \sqrt[4]{\frac{a^4}{12}}$, et erigatur bd, Longitudo Arcus dD erit t sive $\frac{z^3}{aa} - \frac{aa}{12z}$. Et hoc de alijs Curvis generaliter intelligenda sunt.

Ad eundem modum quo hujus Longitudinem determinavimus si pro alia Curva definienda proponatur Aequatio $\frac{z^4}{a^3} + \frac{a^3}{32z^2} = y$, proveniet $\frac{z^4}{a^3} - \frac{a^3}{32z^2} = t$, vel si proponatur $\frac{z^5}{a^4} - \frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} = y$, proveniet $\frac{z^5}{a^4} + \frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} = t$, vel generaliter si sit $cz^{\frac{p}{q}} + \frac{z^{2-p}}{480c-80c} = y$, ubi c pro quolibet fuit integro sive fracto designando substituitur, erit $cz^{\frac{p}{q}} - \frac{z^{2-p}}{480c-80c} = t$.

Exempl. 2.

Proponatur Curva quam Aequatio $\frac{2aa+22z}{3aa}\sqrt{aa+zz} = y$ definit, et per Prob. 1. obtinebitur $y = \frac{4a^4x+8a^2x^3+4x^5}{3a^4y}$, sive indeterminato y , $y = \frac{22}{aa}\sqrt{aa+zz}$ cujus quadrato adde 1, et Summa erit $1 + \frac{4z^2}{aa} + \frac{4z^4}{a^4}$, ejusq. radice $1 + \frac{2z^2}{aa} = t$, unde per Prob. 2. obtinebitur $z + \frac{32z^3}{3a^2} = t$.

Exempl.

Exempl: 3.

Proponatur Parabola secundi generis ad quam Aequatio est $z^3 = ay^2$, seu $\frac{z^3}{a^{\frac{2}{3}}} = y$, et inde per Prob: 1. elicitur $\frac{3z^{\frac{2}{3}}}{2a^{\frac{2}{3}}} = y$, adeoque est $\sqrt{1 + \frac{9z^{\frac{2}{3}}}{4a^{\frac{2}{3}}}} (= \sqrt{1 + yy}) = t$. Jam Longitudo per fluctationem t generata nequeat inveniri per Prob: 2 absq. reductiones in infinitam Seriem simplicium terminorum, consulo Catalogos ad Prob: 9, et iuxta ea quae in Scholio eius habentur prodit $t = \frac{9a + 102}{27} \sqrt{1 + \frac{9z^{\frac{2}{3}}}{4a^{\frac{2}{3}}}}$.

Et sic Parabolaeum $z^5 = ay^4$, $z^7 = ay^6$, $z^9 = ay^8$, &c. Longitudines inveniri possunt.

Exempl: 4.

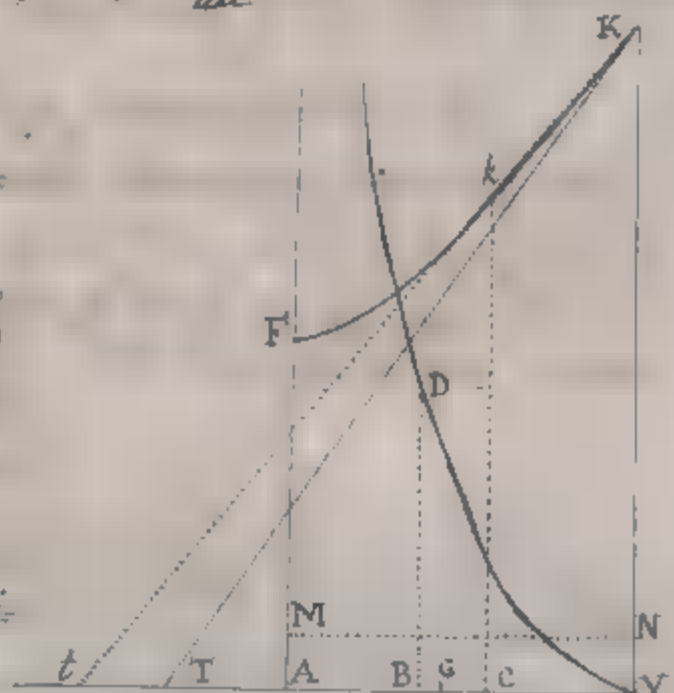
Proponatur Parabola ad quam Aequatio est $z^4 = ay^3$, rive $\frac{z^4}{a^{\frac{3}{4}}} = y$, et inde per Prob: 1. oritur $\frac{4z^{\frac{3}{4}}}{3a^{\frac{3}{4}}} = y$. Adeoque $\sqrt{1 + \frac{16z^{\frac{3}{4}}}{9a^{\frac{3}{4}}}} (= \sqrt{yy + 1}) = t$. Quo invento consulo Catalogos, iuxta Scholium praedictum, et facta collatione cum secundo Theoremate quinti, Ordinis posterioris Catalogi, prodit $z^{\frac{5}{4}} = x \cdot \sqrt{1 + \frac{16xx}{9a^{\frac{3}{4}}}} = v$, et $\frac{3}{2} s = t$. Ubi x designat Basim, y Ordinationem applicatam, et s Arcum Hyperbolae, atq. t Longitudinem quae oritur applicando Arcum $\frac{3}{2} s$ ad unitatem Linearum.

Eadem Methodo Parabolaeum $z^6 = ay^5$, $z^8 = ay^7$, $z^{10} = ay^9$, &c. Longitudines etiam per Arcum Hyperbolae determinantur.

Exempl: 5.

Proponatur Cylindri Veterum, et exstante ad eam Aequatione $\frac{aa - 2az + 2z}{\sqrt{az - 2z}} = y$, inde per Prob: 1. elicitur $\frac{-a - 2z}{2\sqrt{az - 2z}} = y$, et consequenter $\frac{a}{2z} \sqrt{a + 3z} (= \sqrt{yy + 1}) = t$. Qua scribendo z pro $\frac{1}{2}$ seu z' , oradit $\frac{a}{2z} \sqrt{a + 3z} = t$. Aequatio prima speciei quinti Ordinis posterioris Catalogi. Et collatis terminis fit $\frac{a}{2} = d$, $3 = e$ & $a = f$; adeoque $z (= \frac{1}{2}y) = x^2 \sqrt{a + 3xx} = v$, et $6s - \frac{2v^3}{x} (= \frac{4de}{4f} \ln \frac{v^3}{x} - s) = t$. Et adhibita a pro unitate per cujus Multiplicationem, vel Divisionem haec quantitates ad iustum dimensionum numerum reducantur; oradit $az = xx \sqrt{a + 3xx} = v$, & $\frac{6s}{a} - \frac{2v^3}{ax} = t$. Quorum haec est Constructio.

Existente VD Cylindri, Diametro Circuli ad quem aptatur, AF Asymptoto eius ac DB perpendiculari ad AV; cum Semiaxe AF = AV et Semiparametro AG = $\frac{1}{3}$ AV describatur Hyperbola FkK, et inter AB & AV sumpta AC media proportionali erigatur ad CKV perpendiculara Ck & VK, et agantur kt et KT rectae Tangentes Hyperbolam in k & K, et occurrentes AV in t ac T, et ad AV conscribatur rectangulum AVNM aequale spatio TKkt; et Cylindri VD Longitudo erit Sexcupla Altitudinis VN.



Exempl.

Exempl. 6.

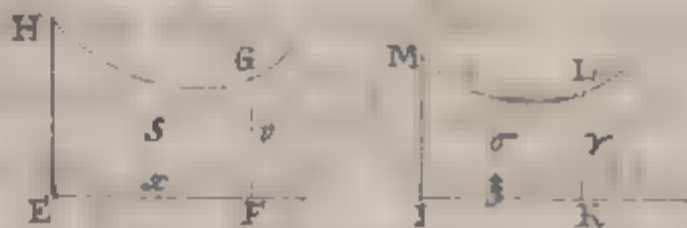
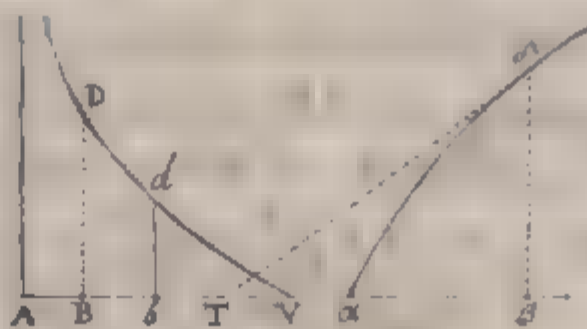
Existente Ad (fig. pag. 1) Ellipsi quam Aequatio $\sqrt{ax-2xz} = y$ definit: proponatur Curva Mechanica AD talis ut si BD seu y producatur donec huic $\sqrt{ax-2xz}$ ad D occurrat, sit BD aequalis Arcui Ellipticae AD. Jam quo hujus Longitudo determinatur Aequatio $\sqrt{ax-2xz} = y$, dabit $\frac{a-4xz}{2\sqrt{ax-2xz}} = y$. Cujus Quadrato si 1 addatur prodit $\frac{aa-4ax+8xz}{4ax-8xz}$ Quadratum fluxionis Arcus AD, et huic si iterum addatur 1, proveniunt $\frac{aa}{4ax-8xz}$ cujus radix $\frac{a}{2\sqrt{ax-2xz}}$ est fluxio Curvae Lineae AD. Ubi si e radicali $ax-2xz$ trahatur z et pro z^{-1} scribatur z , habebitur $\frac{a}{2\sqrt{ax-2xz}}$ fluxio prima Speciei septimi Ordinis posterioris Catalogi: Collatisq; terminis exhibunt $d = \frac{1}{2}a$, $e = -2$, et $f = a$, adeoque $z (= \frac{1}{2}a) = x$, $\sqrt{ax-2xz} = v$, et $\frac{0.5}{a} - \frac{4zv}{a} + v$ ($= \frac{0.5}{a}$ in $s - \frac{1}{2}zv - \frac{4zv}{a}$) $= t$.

Quorum Constructio est ut, ad Ellipsi Centrum C acta recta dC, constitatur super AC parallelogrammum aequale Sectori ACd, et duplum altitudinis ejus ponatur esse Longitudo Curvae AD.

Exempl. 7.

Existente AB = φ et α Hyperbola ad quam Aequatio sit $\sqrt{a+b\varphi\varphi} = \beta\delta$, actaq; δT Tangente ejus: proponatur Curva VdD, cujus Basis AB sit $\frac{a}{b\varphi}$, et normaliter incedens BD Longitudo quae oritur applicando Arcum α et $T\alpha$ ad unitatem Linearum. Jam ut hujus VD Longitudo determinetur, quales fluxionem Arcus α et $T\alpha$ cum AB uniformiter fluit, et invenio esse $\frac{a}{4bz} - \sqrt{b-az}$, posita AB = z et fluxione ejus unitate. Nam est $AT = \frac{a}{b\varphi} = \frac{a}{b} \sqrt{z}$, ejusq; fluxio $\frac{a}{2bz}$ cujus dimidium Ductum in Altitudinem $\beta\delta$ seu $\sqrt{a+\frac{1}{2}}$ est fluxio Arcus α et T descripta per tangentem δT . Quare fluxio illa est $\frac{a}{4bz} \sqrt{b-az}$, atq; hac applicata ad unitatem fit fluxio incedentis BD. Cujus Quadrato $\frac{aab-a^3z}{16b^2z^2}$ addit 1, quadratum fluxionis ipsius AB prodit $\frac{aab-a^3z+16b^2z^2}{16b^2z^2}$, cujus radix $\frac{1}{4}z \sqrt{a^2b-a^3z+16b^2z^2}$ est fluxio Curvae VD. Est autem hac fluxio prima Speciei sexti Ordinis posterioris Catalogi, collatisq; terminis exhibent $\frac{1}{4}b = d$, $aab = e$, $a^3 = f$, $16b^2 = g$, adeoque $z = x$, $\frac{1}{4}z \sqrt{a^2b-a^3z+16b^2z^2} = v$ (Aequatio ad unam Conicam Sectionem puta HG, cujus Area EFGH sit s , existente EF = x , et FG = v). Item $\frac{1}{2} = \gamma$, et $\sqrt{16bb-a^3z+abz} = \gamma$. Aequatio ad aliam Conicam Sectionem, puta ML, cujus Area IKLM sit σ , existente IK = z , et KL = γ). Deniq; $2aebbz - a^3b\gamma - a^4v - 4aabb\sigma - 32abbs = t$.

Quare ut Curvae VD portio cuiuscunq; Dd Longitudo noscatur demitte ab normallem ad AB fingeq; AB = z , & exinde per jam inventa quare t , dein finge AB = z & exinde etiam quare t , & horum duorum t differentia erit Longitudo Dd. Exempl.



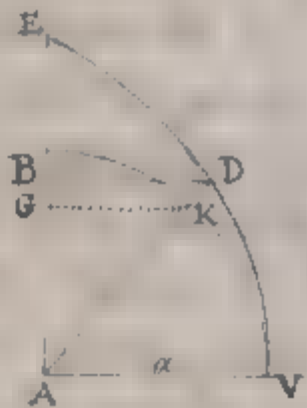
Exempl. 8.

Proponatur Hyperbola ad quam Aequatio est $\sqrt{aa + bzz} = y$, et inde (per Prob. 1.) eliciatur $y = \frac{bz}{y}$ seu $\frac{bz}{\sqrt{aa + bzz}}$. Cujus Quadrato adde 1 et Summae radix erit $\sqrt{\frac{aa + bzz}{aa + bzz} + \frac{b^2 z^2}{aa + bzz}} = t$. Hanc Fluxionem cum non reperiatur in Tabulis reduco in infinitam Seriem. et primo per Divisionem evadit $t = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} z^2} = 1 + \frac{b^2}{2a^2} z^2 - \frac{b^4}{8a^4} z^4 + \frac{b^6}{16a^6} z^6 - \frac{b^8}{128a^8} z^8 + \dots$ deinde per extractionem radices $t = 1 + \frac{b^2}{2a^2} z^2 - \frac{b^4}{8a^4} z^4 + \frac{b^6}{16a^6} z^6 - \frac{b^8}{128a^8} z^8 + \dots$ Et hinc per Prob. 2. obtinebitur t seu Longitudo Hyperbolae $= z + \frac{b^2}{6a^2} z^3 - \frac{b^4}{40a^4} z^5 + \frac{b^6}{112a^6} z^7 - \dots$

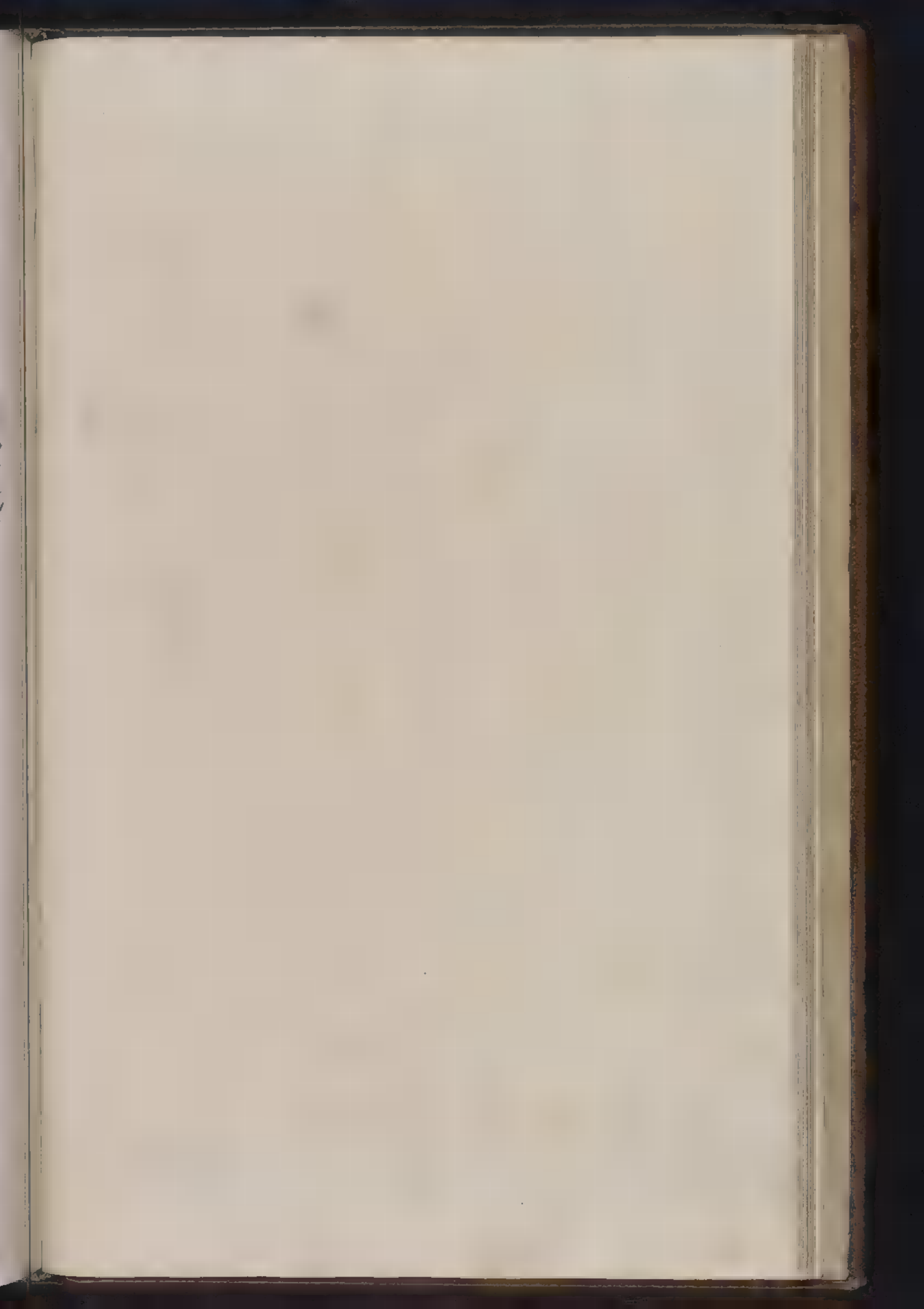
Quod si Ellipsis $\sqrt{aa - bzz} = y$, proponatur debet Signum ipsius b ubiq. mutari, & habebitur $z + \frac{b^2}{6a^2} z^3 + \frac{b^4}{40a^4} z^5 + \frac{b^6}{112a^6} z^7 + \dots$ pro Longitudine ejus; et posita insuper unitate pro b , emerget $z + \frac{z^3}{6a^2} + \frac{3z^5}{40a^4} + \frac{5z^7}{112a^6} + \dots$ pro Longitudine Circuli. Cujus Series Numerales Coefficientes in infinitum inveniuntur multiplicando continuo terminos hujus Progressionis $\frac{1 \times 1}{2 \times 3}, \frac{3 \times 3}{4 \times 5}, \frac{5 \times 5}{6 \times 7}, \frac{7 \times 7}{8 \times 9}, \frac{9 \times 9}{10 \times 11} \dots$

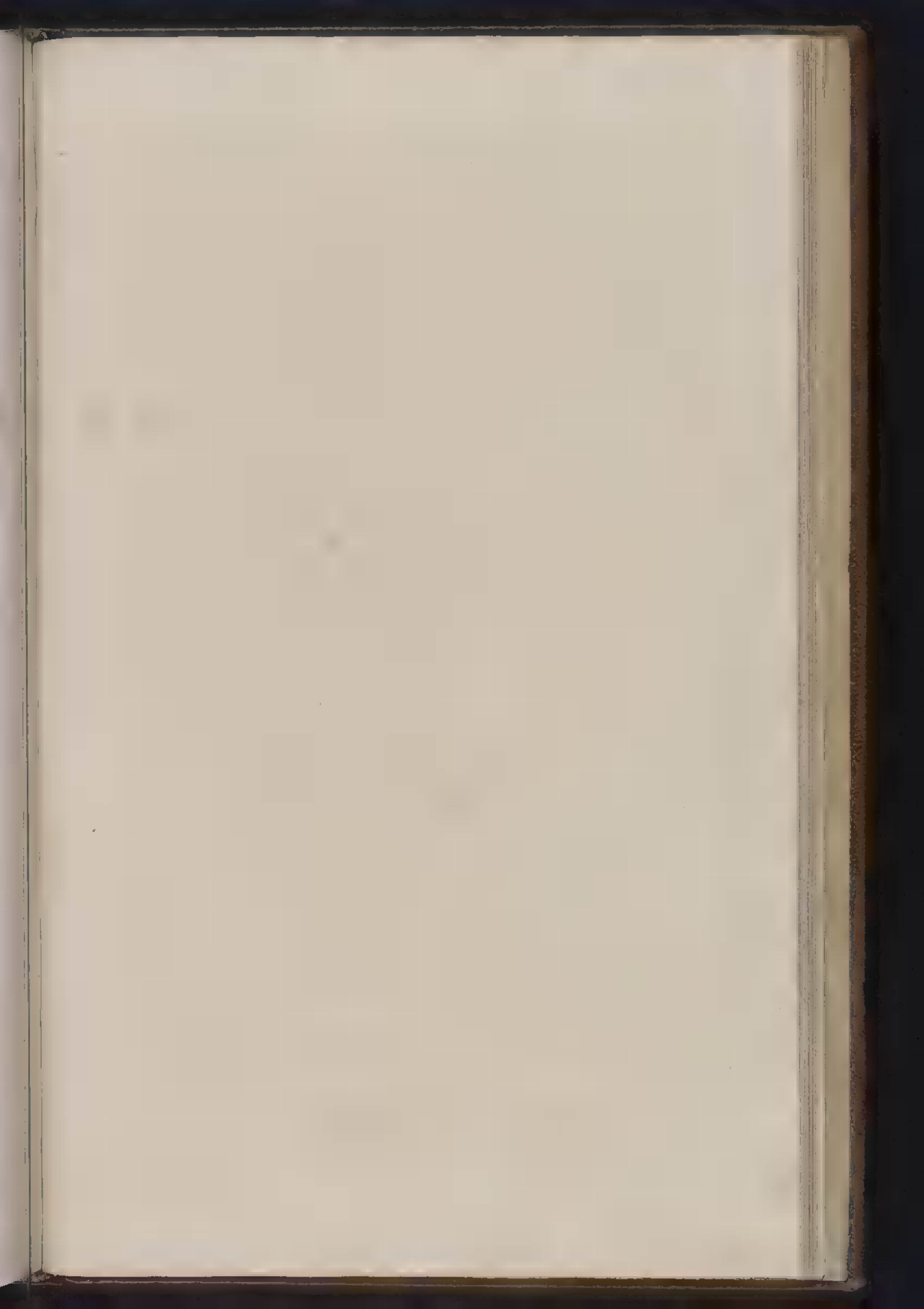
Exempl. 9.

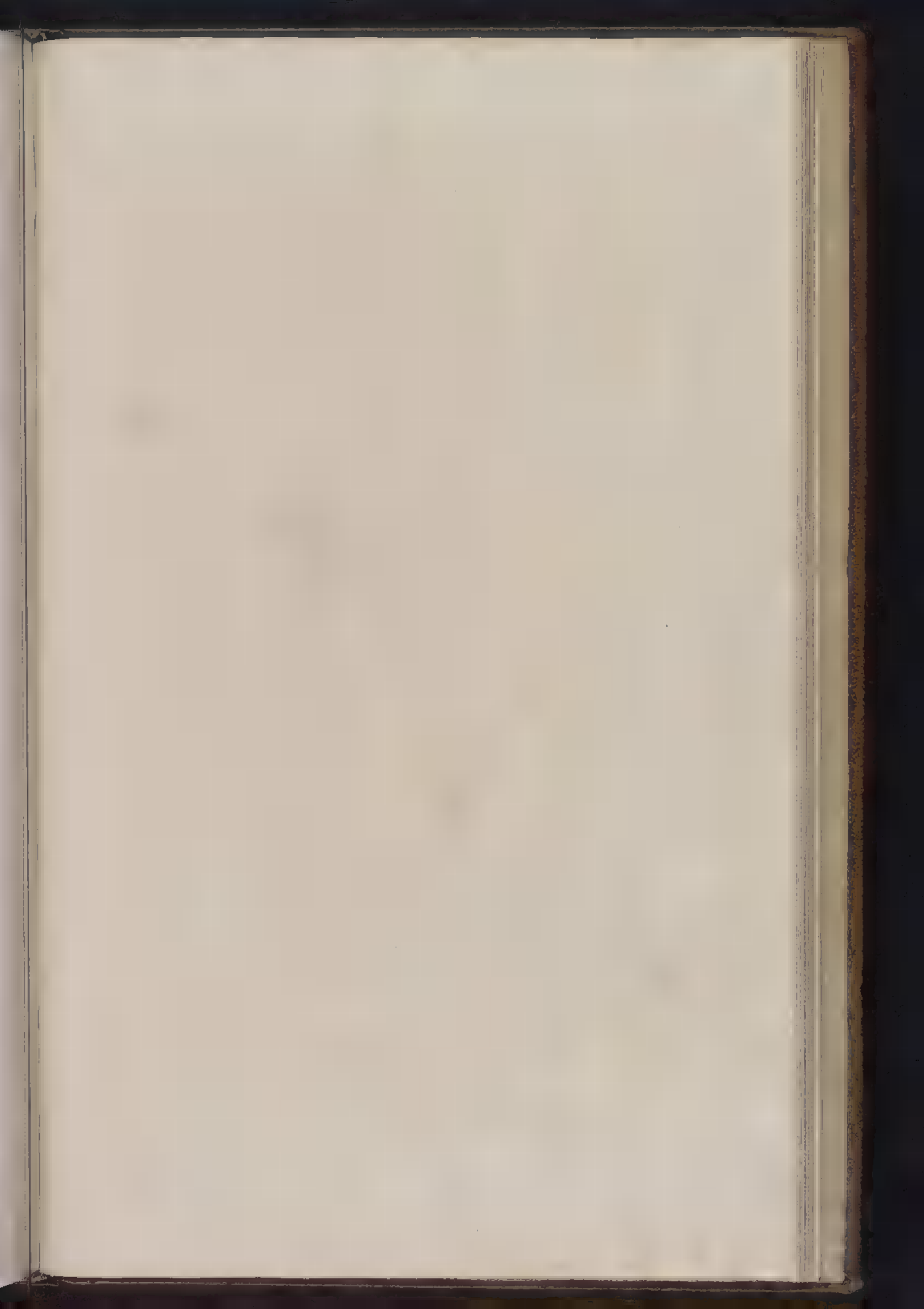
Proponatur deniq. Quadratrix VDE. cujus vertex est V, existente A Centro & AV Semidiametro Circuli interioris ad quam aptatur, atq. Angulo VAE recto. Acta jam recta qualibet AKD secante Circulum istum in K. & Quadratricem in D demissisq. ad AE normalibus KG, DB; dic AV = a , AG = z , VK = x , et BD = y ; eritq. ut in superiore Exemplo, $x = z + \frac{z^3}{6a^2} + \frac{3z^5}{40a^4} + \frac{5z^7}{112a^6} + \dots$ Extrahe radicem z , et emerget $x = z + \frac{z^3}{6a^2} + \frac{3z^5}{40a^4} + \frac{5z^7}{112a^6} + \dots$ Cujus Quadratum aufer de AK^2 , & residui radix $a - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^4}{24a^3} - \frac{x^6}{720a^5} + \dots$ est GK. Jam cum ex natura Quadratricis sit AB = VK = x , sitq. etiam AG : GK :: AB : BD (y), divide AB x GK per AG et orietur $y = a - \frac{xx}{3a} - \frac{x^4}{45a^3} - \frac{2x^6}{945a^5} + \dots$ Et inde per Prob. 1. $y = -\frac{2x}{3a} - \frac{4x^3}{45a^3} - \frac{4x^5}{315a^5} + \dots$ Cujus Quadrato adde 1, et Summae radix erit $1 + \frac{2xx}{9aa} + \frac{14x^4}{405a^4} + \frac{604x^6}{127575a^6} + \dots = t$, unde per Prob. 2. obtinebitur t seu Quadratricis Alacus VD = $x + \frac{2x^3}{27a^2} + \frac{14x^5}{2025a^4} + \frac{604x^7}{893025a^6} + \dots$

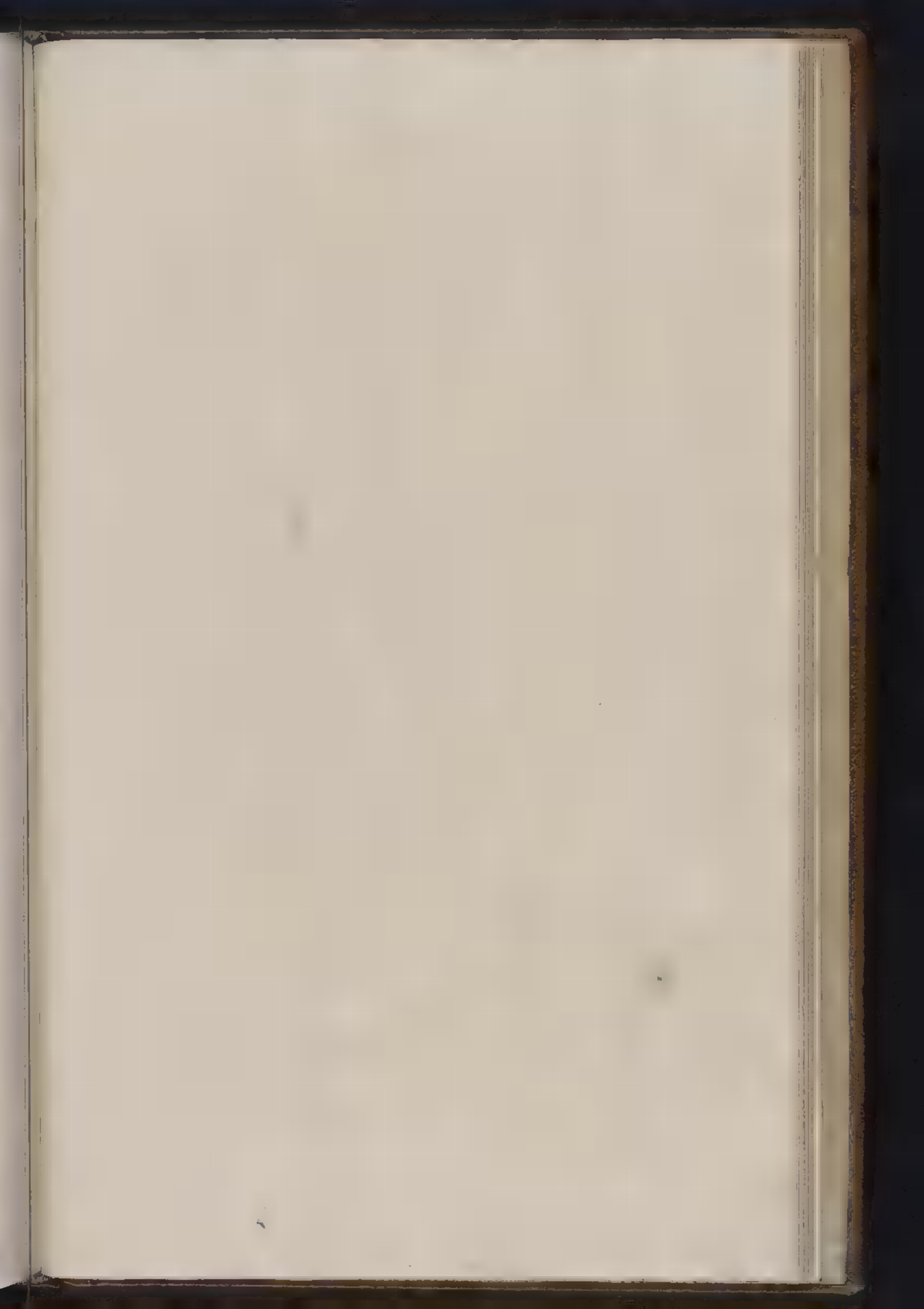


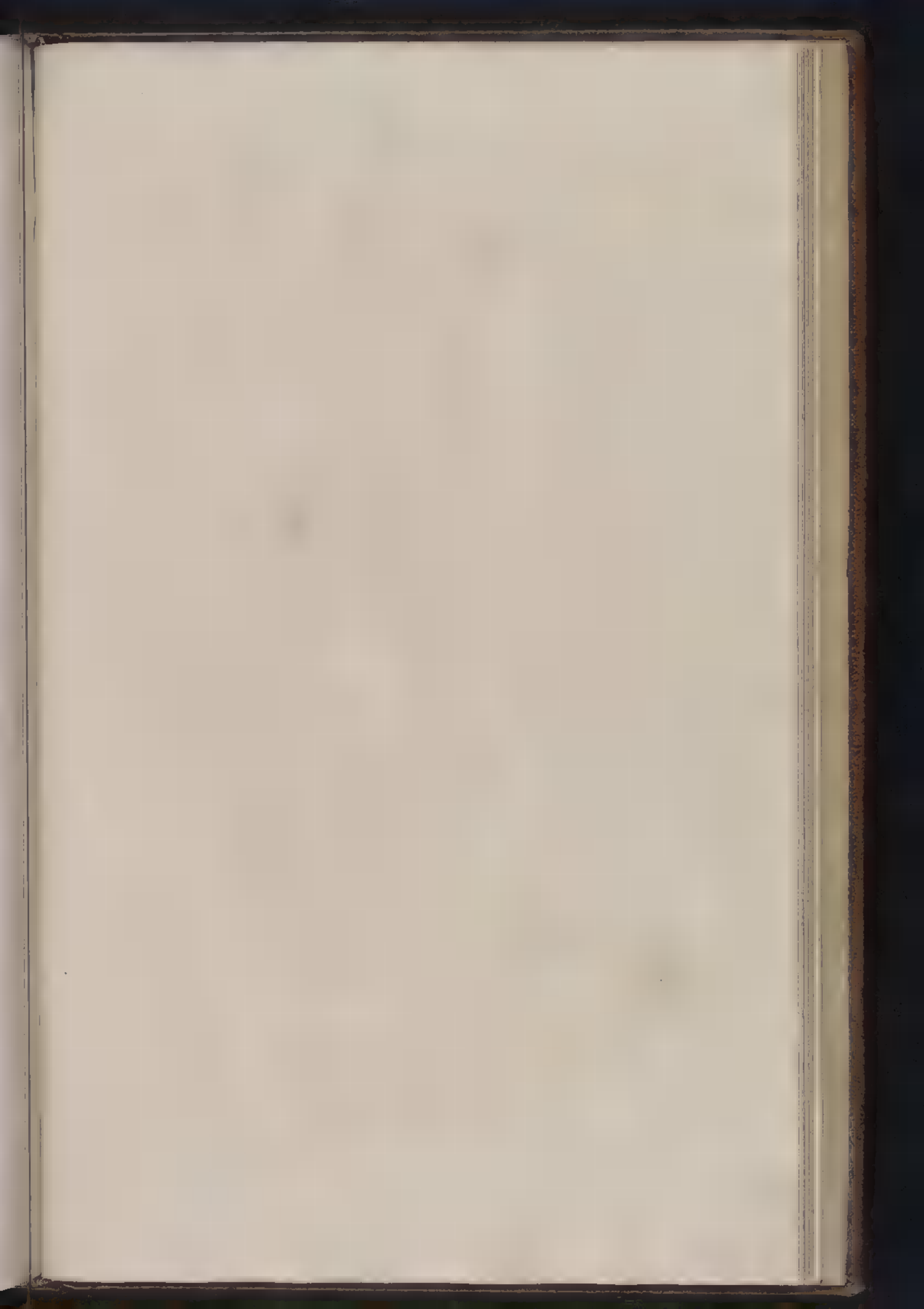
Finis.

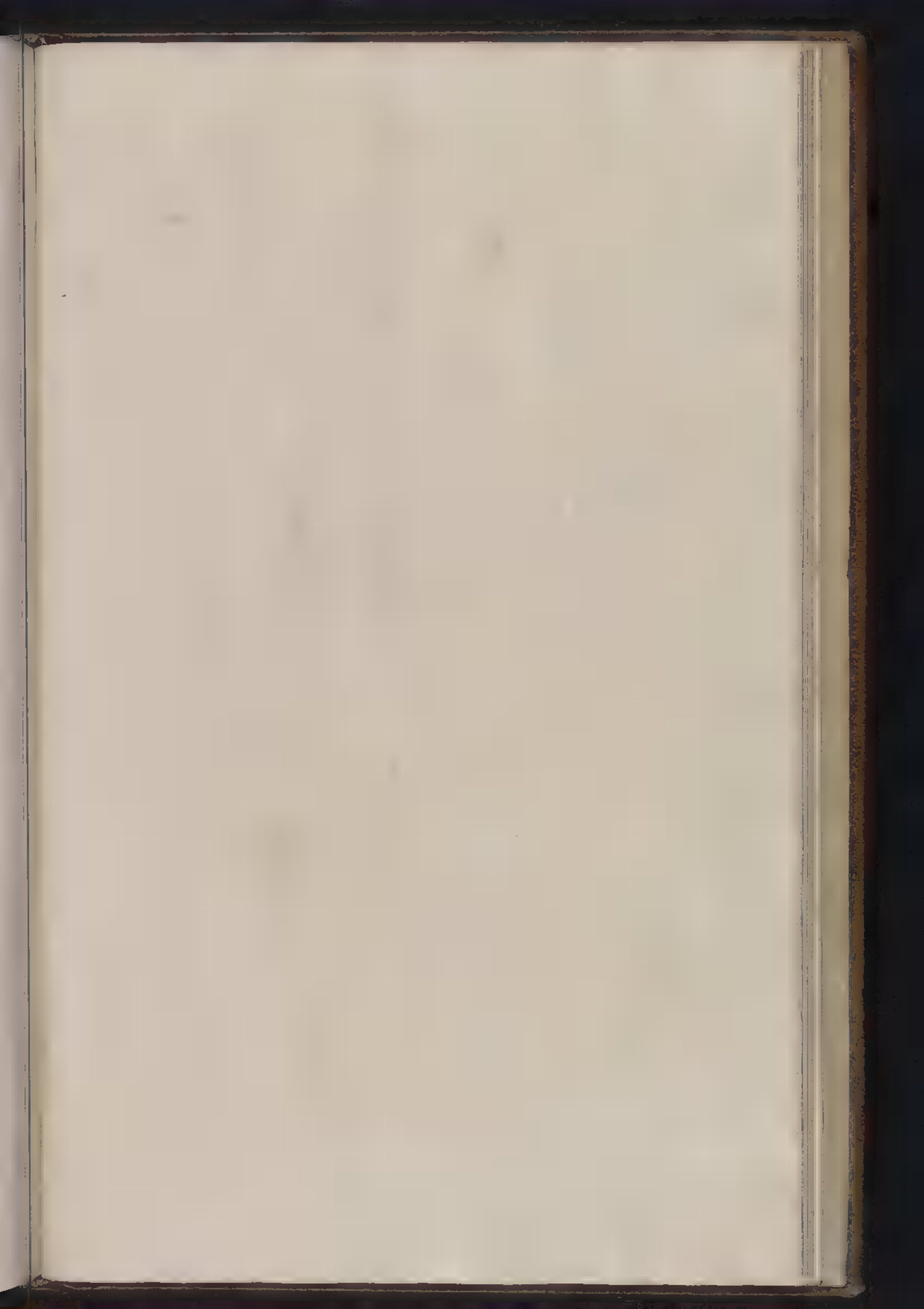


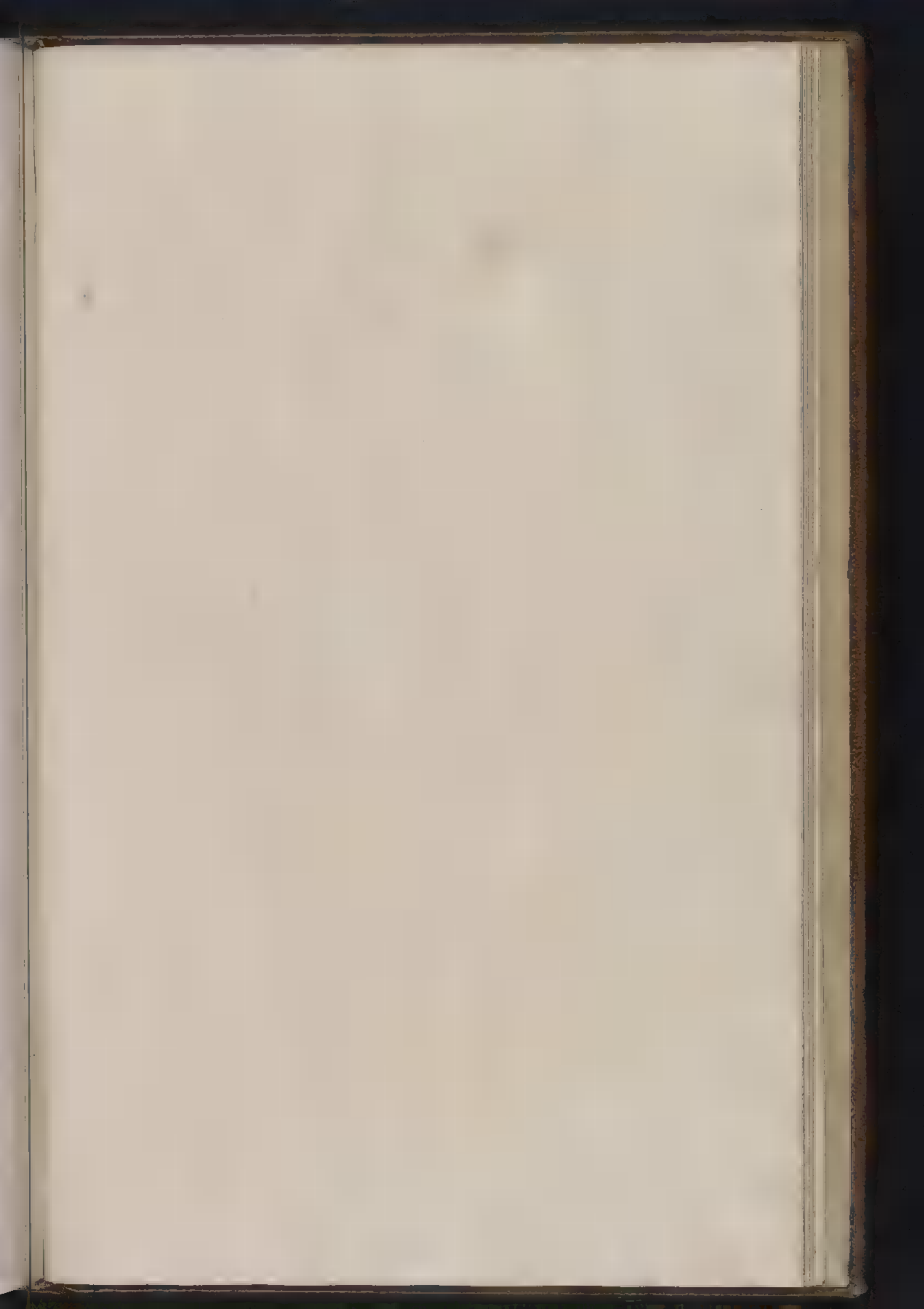


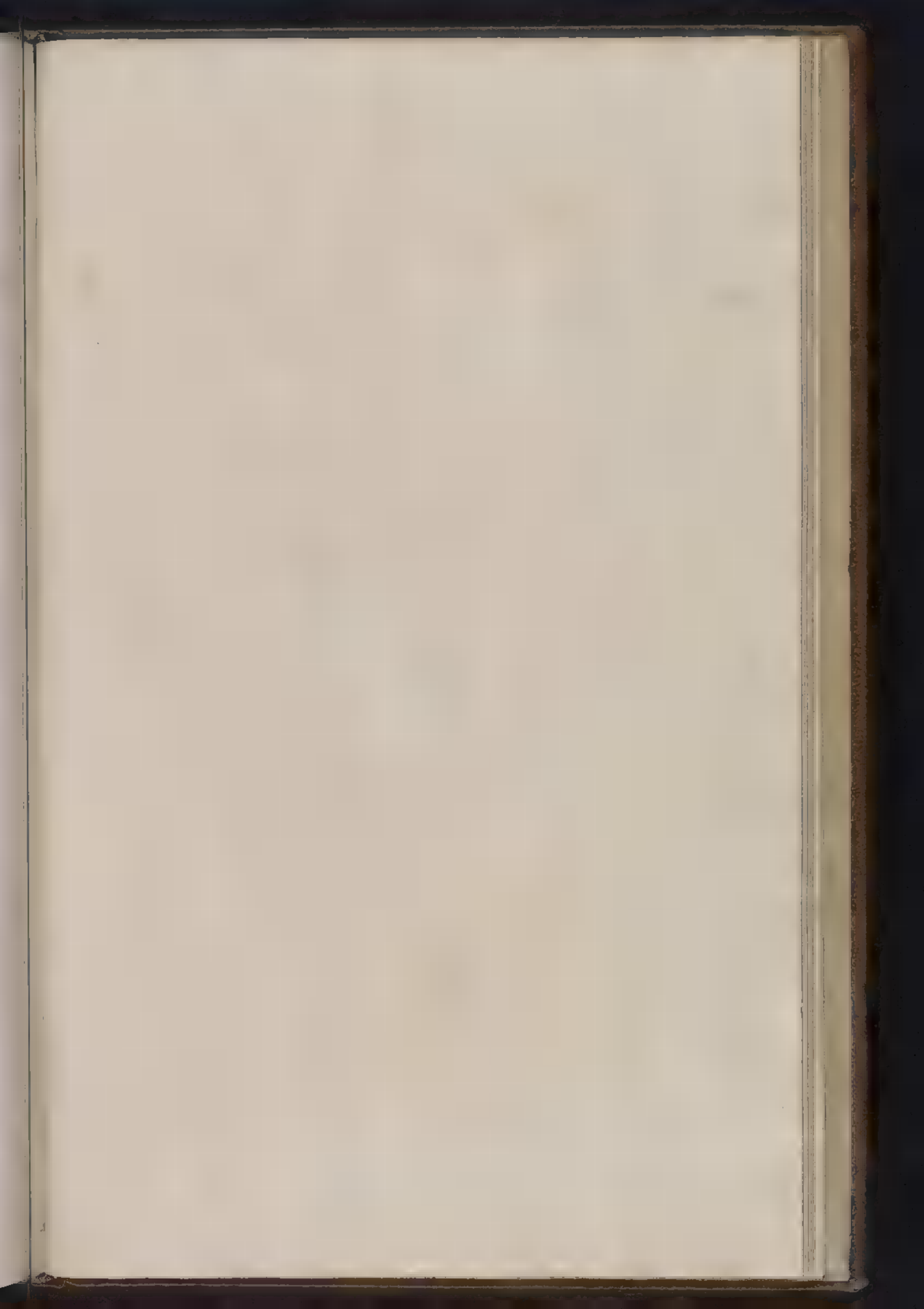


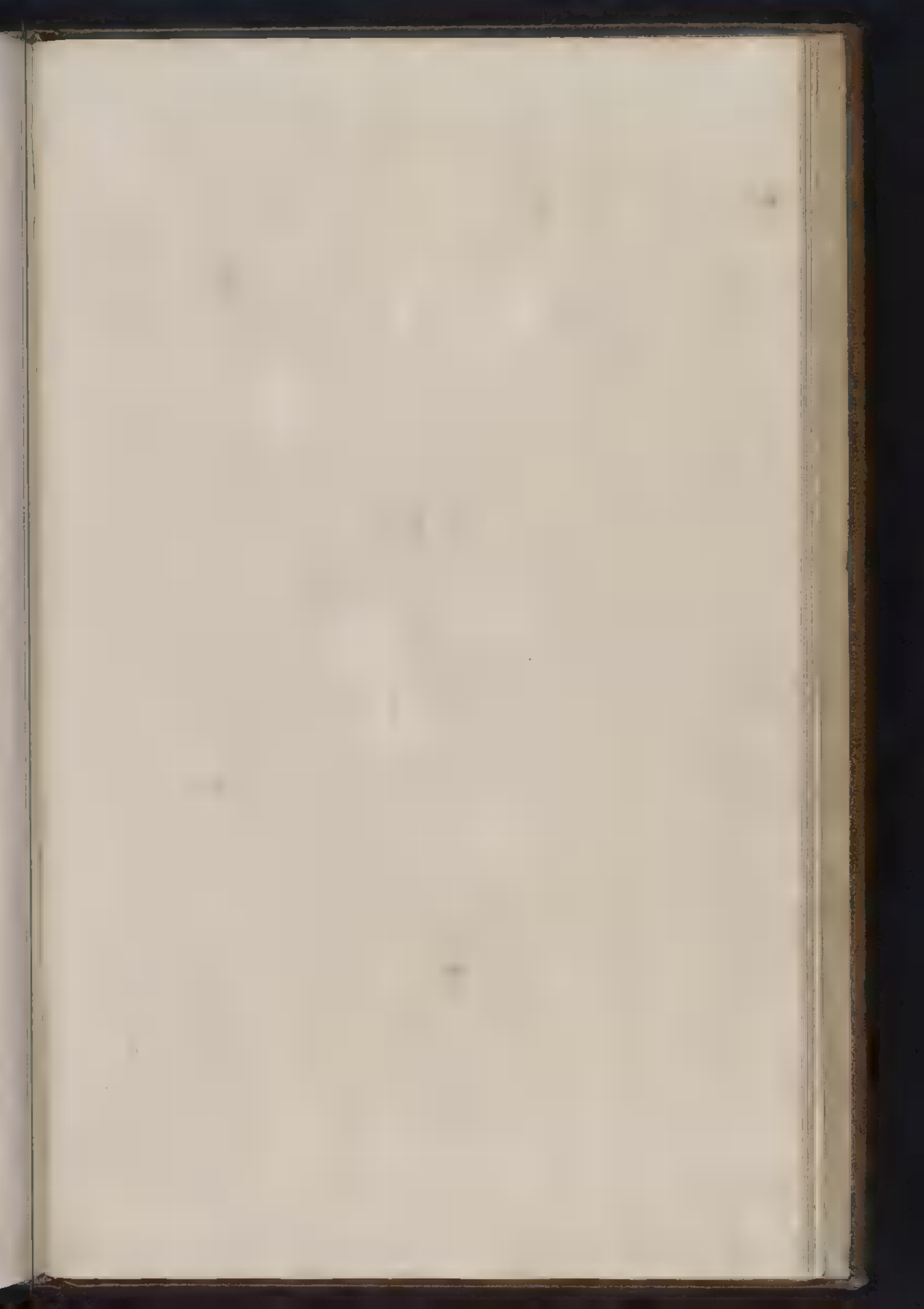


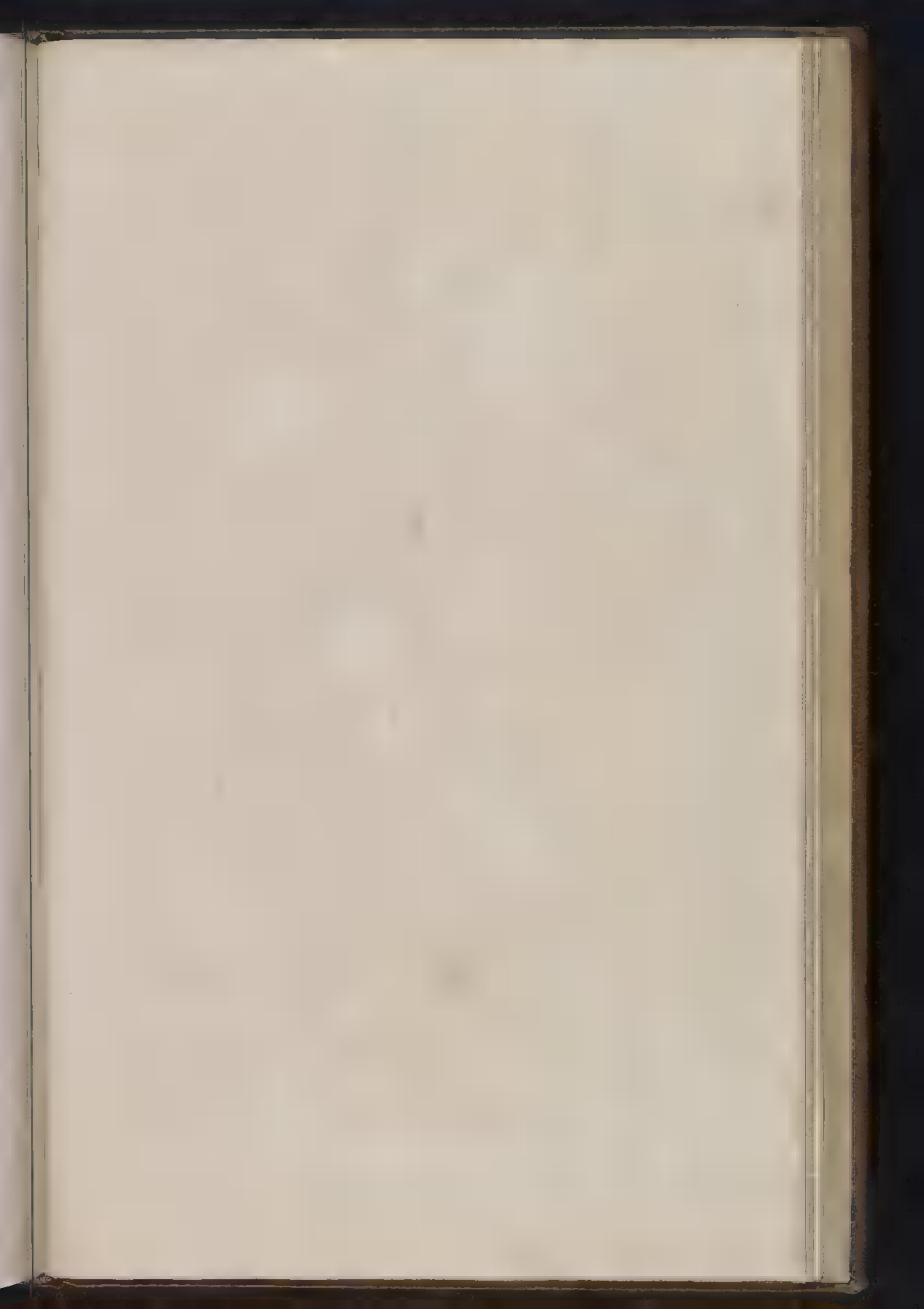


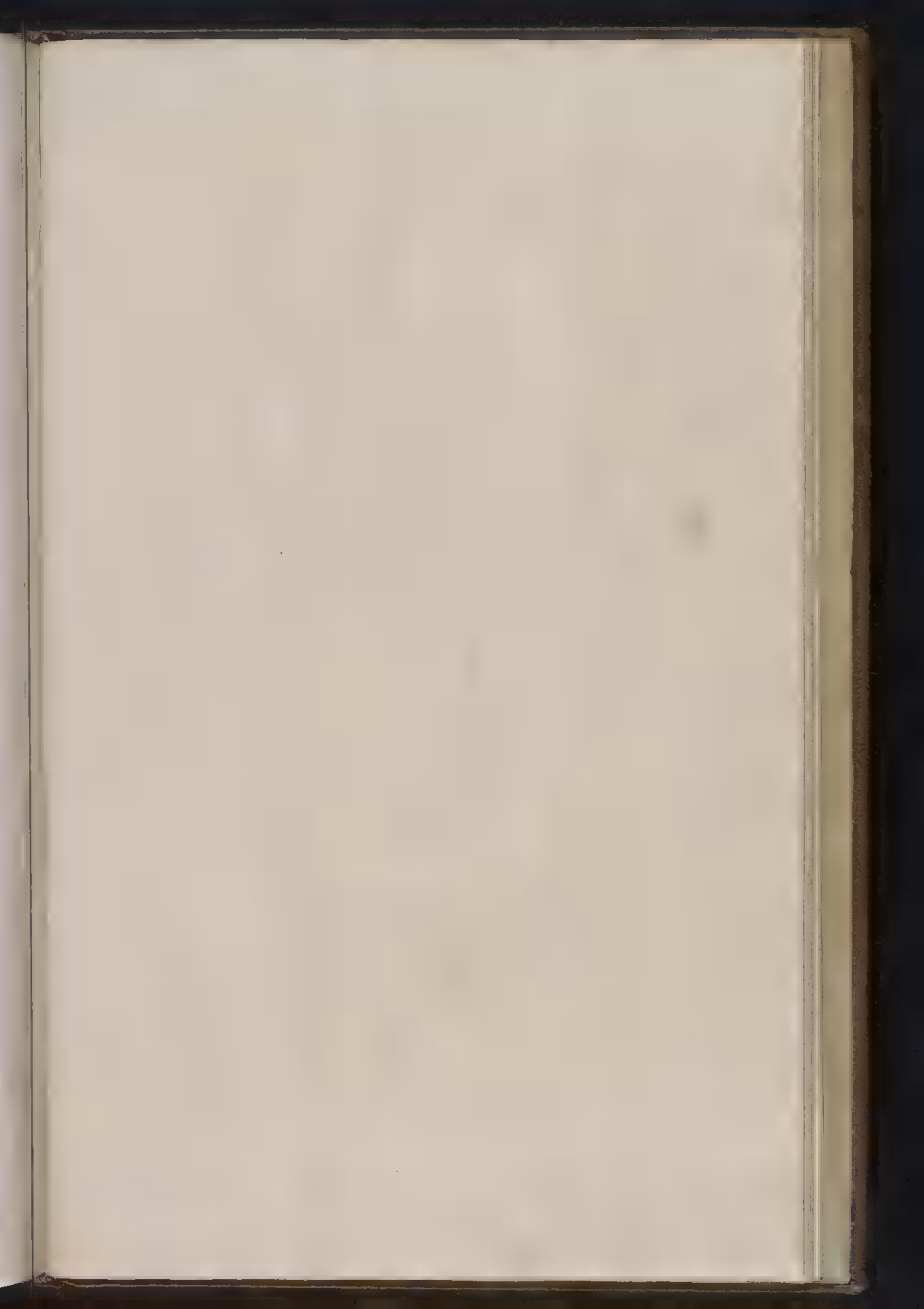


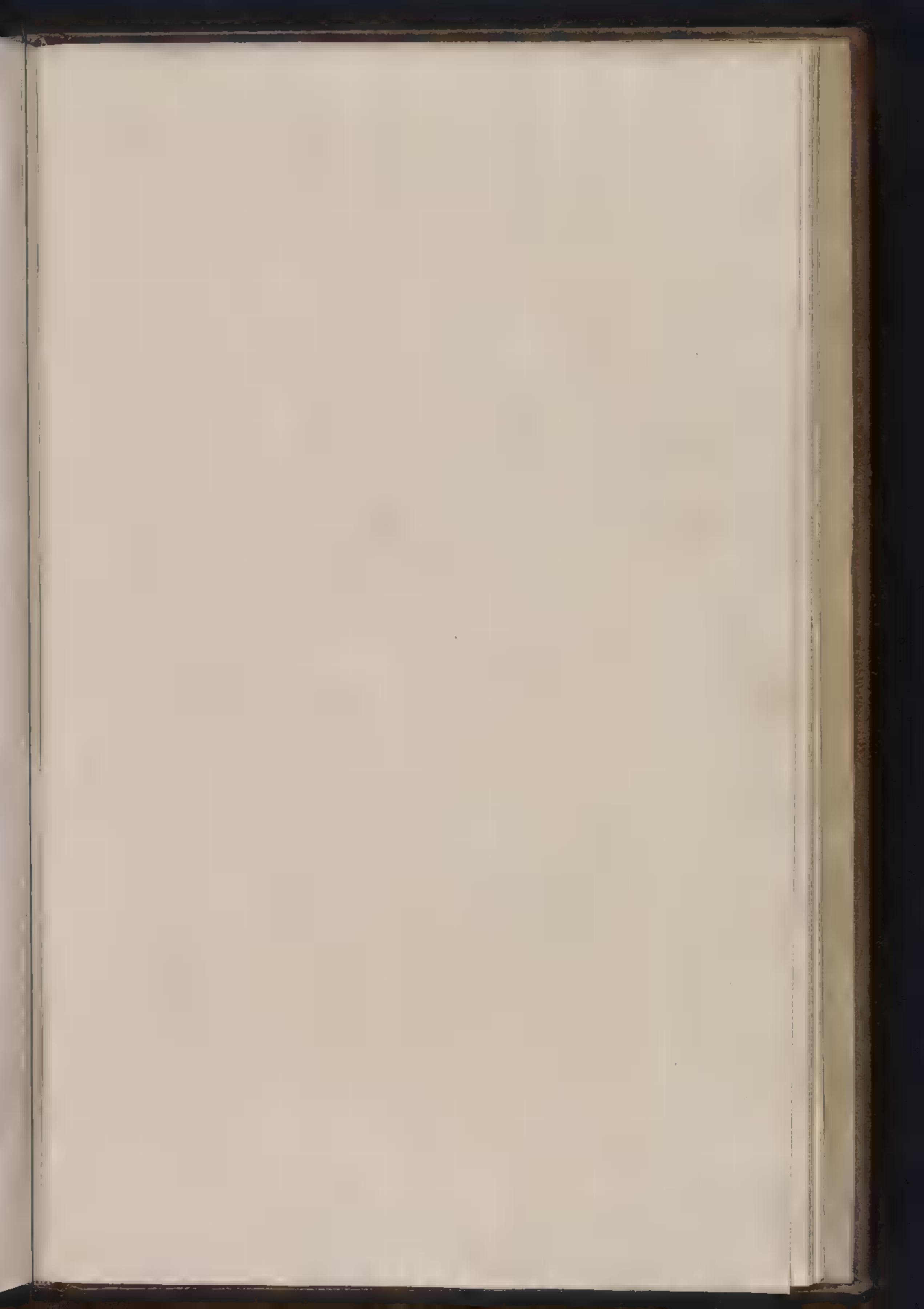


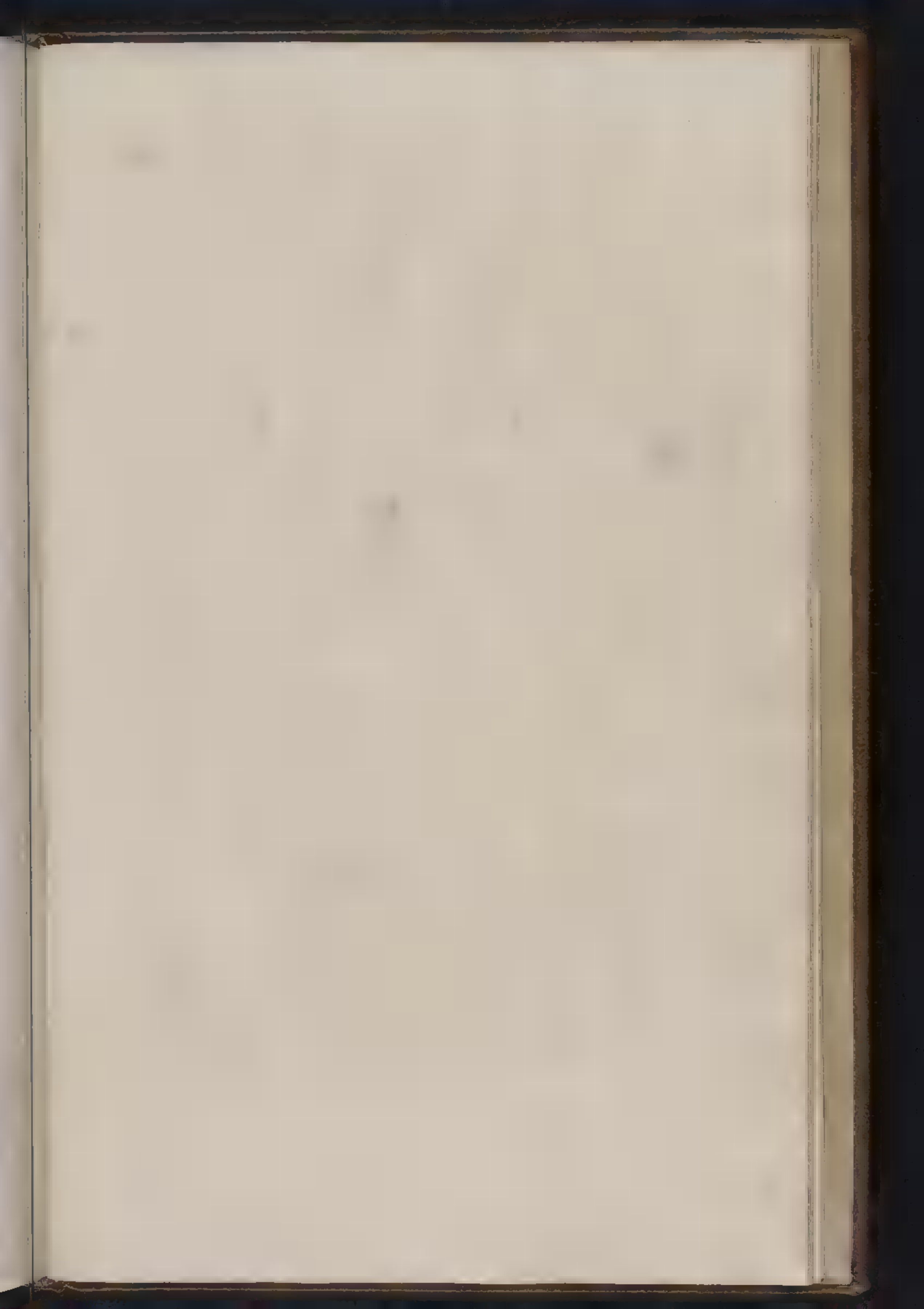


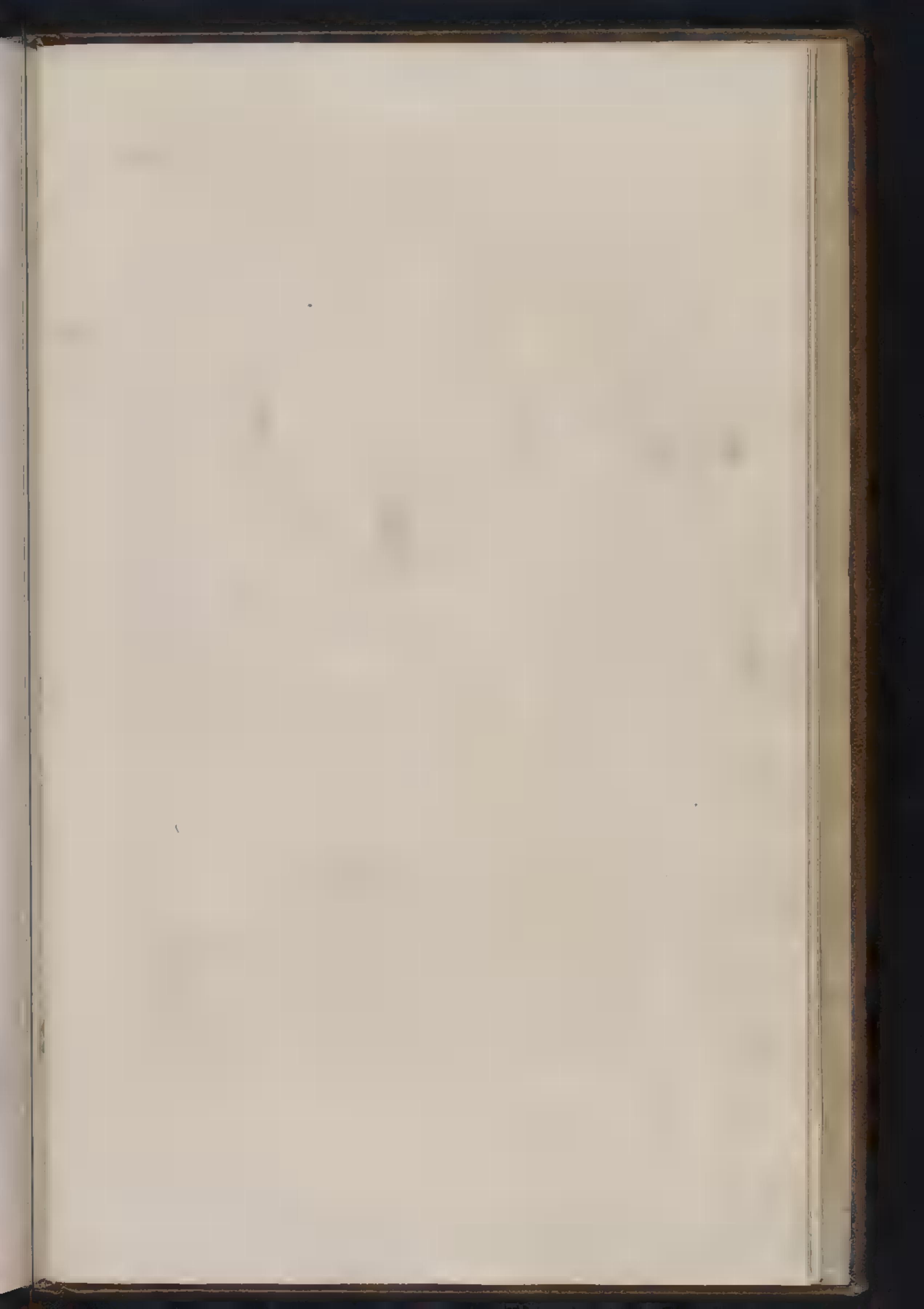


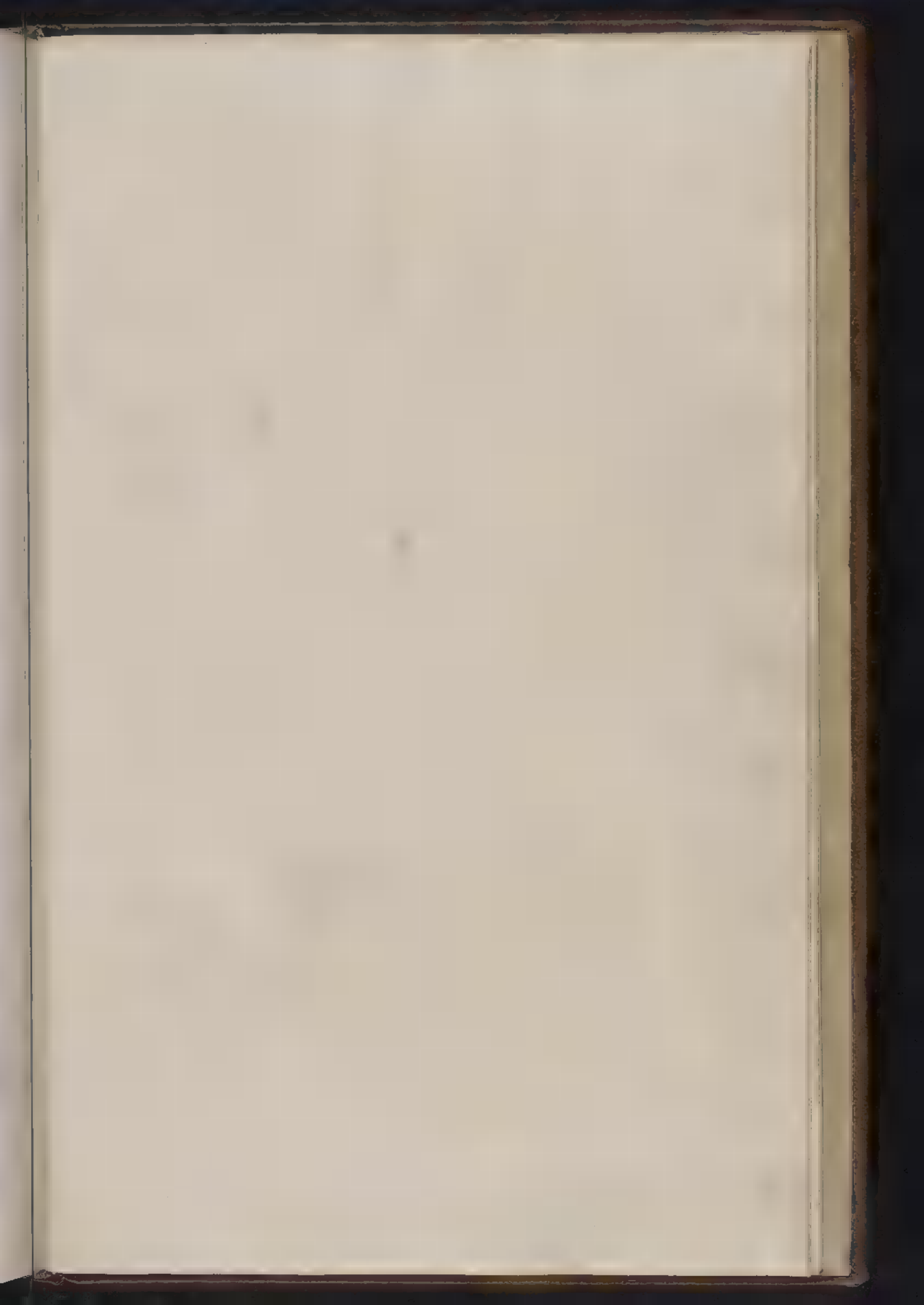


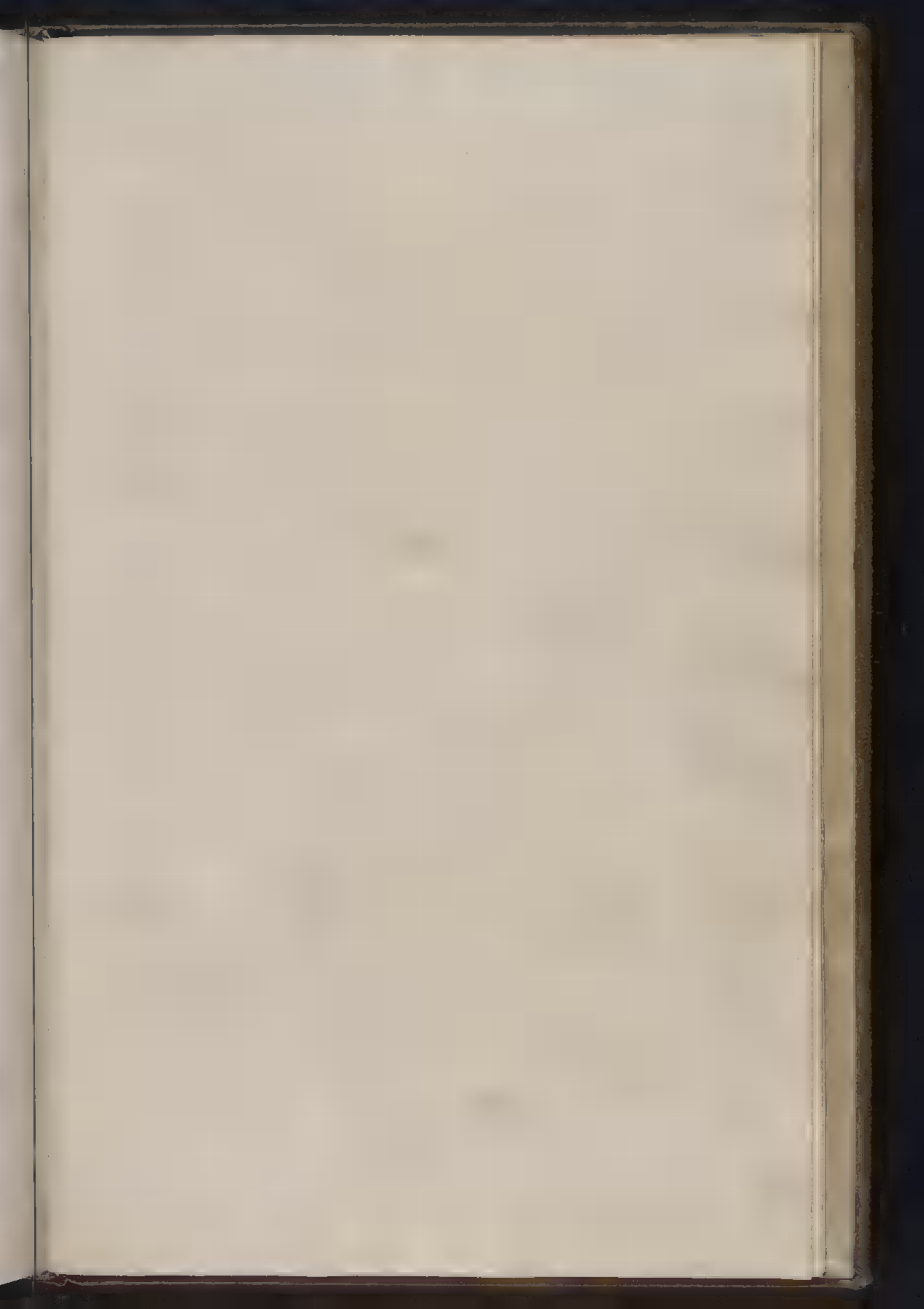


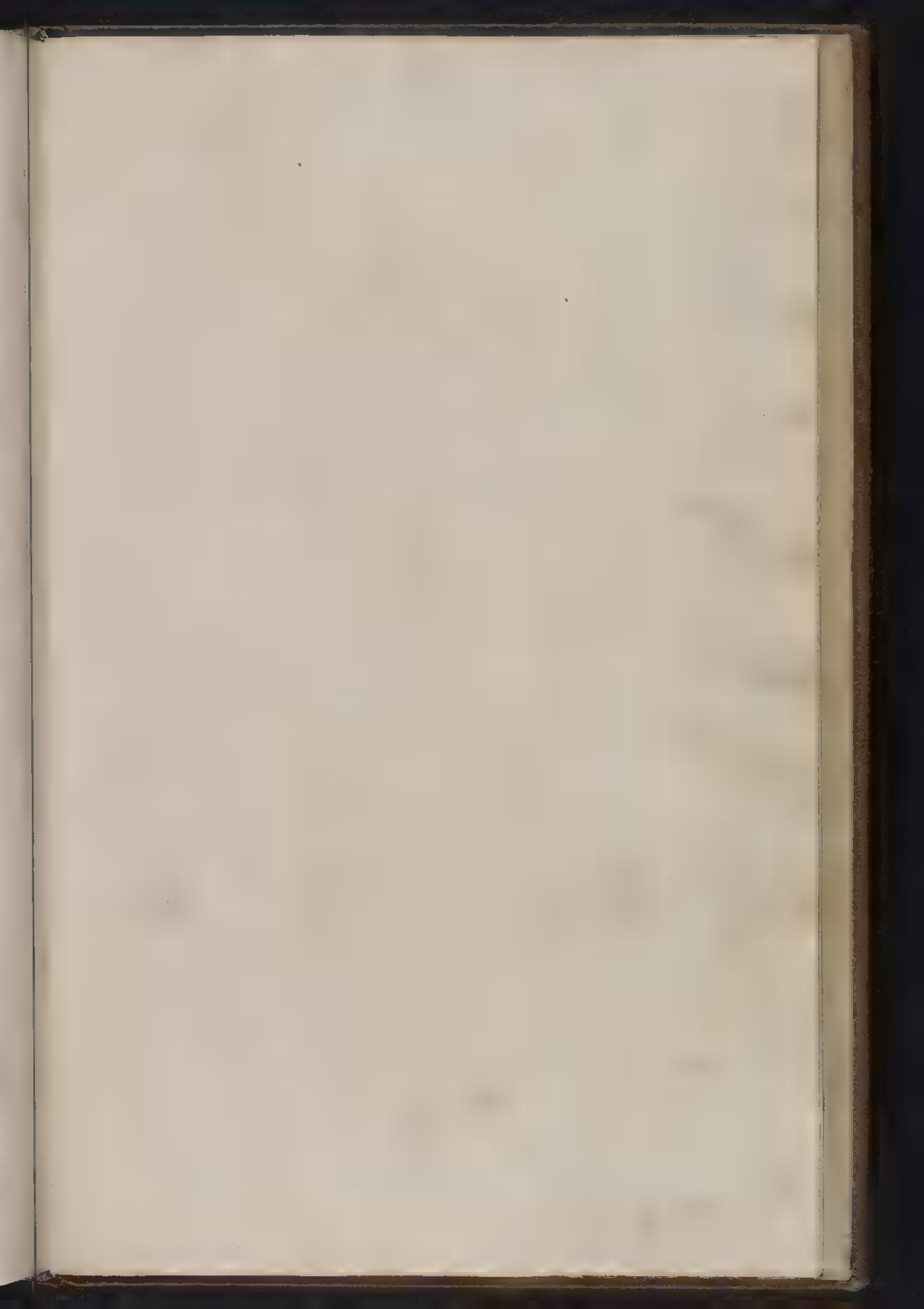




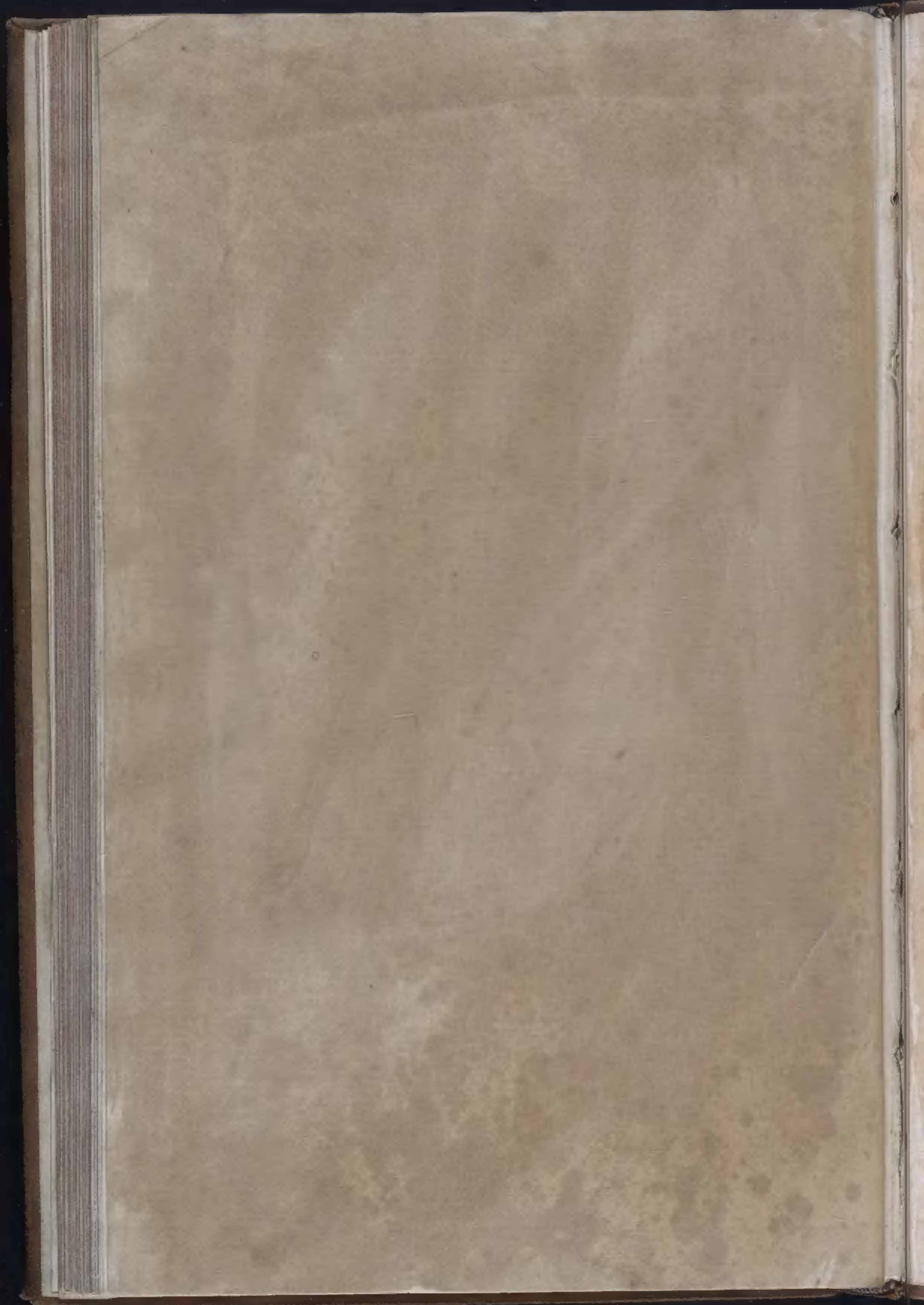












SD262

XJSS

